

E1.2 Solucions.

Solucions d'alguns exercicis de la llista E1.1

1.1 Pateu atenció al fet que les matrius resultat d'un producte tenen tantes files com la primera i tantes columnes com la segona.

a.

$$33$$

b.

$$\begin{pmatrix} 14 & -21 & 35 \\ 4 & -6 & 10 \\ 10 & -15 & 25 \end{pmatrix}$$

c.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

d.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

1.2

$$(A+B)C = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 4 \\ 40 & 38 & 6 \\ 16 & 23 & 14 \end{pmatrix}$$

$$C(3A+2B) = \begin{pmatrix} 54 & 20 & -22 & 49 \\ 30 & 17 & -9 & 35 \\ 16 & 7 & -10 & 11 \\ 94 & -52 & 20 & 99 \end{pmatrix}$$

$$AC = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 2 \\ 29 & 28 & 6 \\ 9 & 13 & 3 \end{pmatrix}$$

$$CA = \begin{pmatrix} 14 & 2 & -14 & 13 \\ 8 & 1 & -5 & 9 \\ 4 & 1 & -6 & 3 \\ 26 & -6 & -4 & 27 \end{pmatrix}$$

1.4 Els determinants valen:

a. -7 b. -2 c. -15 d. 4 e. 22 f. 82 g. 12

1.5 a. Pas 1: Comencem amb un menor d'ordre 1 diferent de zero:

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & -3 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 5 & 1 \\ -1 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \det[2] = 2 \neq 0 \quad \longrightarrow \quad \text{rang} \geq 1$$

Pas 2: Ampliem el menor anterior - conservant-lo! - fins a 2x2, amb determinant no nul:

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & \boxed{-3} & 1 & -2 \\ \boxed{3} & \boxed{0} & 5 & 1 \\ -1 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \det \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = 9 \neq 0 \quad \longrightarrow \quad \text{rang} \geq 2$$

Pas 3: Ampliem el menor anterior - conservant-lo! - fins a 3x3, amb determinant no nul:

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & \boxed{-3} & \boxed{1} & -2 \\ \boxed{3} & \boxed{0} & \boxed{5} & 1 \\ -1 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \det \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ -1 & 6 & 3 \end{bmatrix} = 0 \quad \longrightarrow \quad \text{no informa}$$

Hem de provar amb una altra possible ampliació:

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 0 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} & 1 & \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \end{pmatrix} \quad \det \begin{bmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 6 & 5 \end{bmatrix} = 0 \longrightarrow \text{no informa}$$

Com que no hi ha més ampliacions possibles, resulta que:

$$\text{rang} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 5 & 1 \\ -1 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix} = 2$$

Nota: no cal provar altres menors 3x3, perquè no seran ampliacions de l'últim menor 2x2 amb determinant diferent de zero. Per exemple, no cal provar:

$$\begin{pmatrix} 2 & \begin{bmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 6 & 3 & 5 \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

perquè no és ampliació de $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, menor 2x2 sobre el que s'ha construït tot el procés.

1.5.d Alternativament al procediment descrit a la solució de l'apartat **a**, també es pot calcular el rang d'una matriu fent servir el mètode de Gauss. L'objectiu és aconseguir zeros per sota (o sobre) d'una diagonal.

Si al llarg del procés tota una fila (o columna) es converteix en zeros, se'n pot prescindir i en conseqüència el rang baixa una unitat.

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 7 & -1 \\ 5 & 5 & -5 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\left(\frac{1}{5}\right)F_3} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 7 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} F_2 - 3F_3 \\ F_1 - 4F_3 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 10 & -4 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{F_1 - \left(\frac{1}{2}\right)F_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 10 & -4 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 & 10 & -4 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Com que s'ha obtingut una diagonal amb elements no nuls, i zeros per sobre, el procés s'ha acabat i el rang = 2.

1.5 (altres apartats del problema 1.5)

b. El rang és 2.

c. 1.

d. 2

e. 1

f. 3

g. 3

1.7.a Per a començar, escriurem el sistema en forma matricial.

Producte de matrius:

Matriu amplificada equivalent:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -5 \\ 2 & -13 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 28 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & -5 & -4 \\ 2 & -13 & 13 & 28 \end{array} \right)$$

L'objectiu és aconseguir de fer zeros a sota de la diagonal principal de la matriu ampliada.

Les operacions:

$F_2 - 2F_1$ (a la segona fila li restem dues vegades la primera fila)

$F_3 - 2F_1$ (a la tercera fila li restem dues vegades la primera fila)

proporcionen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & -5 & -4 \\ 2 & -13 & 13 & 28 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & 7 & -9 & -16 \\ 0 & -7 & 9 & 16 \end{array}\right)$$

Continuem el procés sumant a la tercera fila la segona, $F_3 + F_2$ amb l'objectiu d'eliminar el 7, darrer element no nul per sota de la diagonal. S'obté:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & 7 & -9 & -16 \\ 0 & -7 & 9 & 16 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & 7 & -9 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

de manera que una equació sencera (la tercera) s'ha transformat en $0=0$, deixant d'aportar informació i desapareixent per tant del sistema. Ens trobem davant d'un sistema equivalent a l'inicial, però amb només dues equacions: si el sistema té solució, aquesta dependrà de paràmetres.

Recuperem el sistema associat a la matriu ampliada obtinguda fins el moment, i decidim quina variable passa a ser paràmetre (la z , en el nostre cas), per tornar després a la forma matricial:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & 7 & -9 & -16 \end{array}\right) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x-3y+2z=6 \\ 7y-9z=-16 \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x-3y=6-2z \\ 7y=-16+9z \end{array} \right\} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 6-2z \\ 0 & 7 & -16+9z \end{array}\right)$$

des d'on prosseguim fins a obtenir la matriu identitat a la banda esquerra, fent ara zeros a sobre de la diagonal:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 6-2z \\ 0 & 7 & -16+9z \end{array}\right) \xrightarrow{F_1+\frac{3}{7}F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{7}(-6+13z) \\ 0 & 7 & -16+9z \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{7}F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{7}(-6+13z) \\ 0 & 1 & \frac{1}{7}(-16+9z) \end{array}\right)$$

El problema s'ha resolt. En efecte, si escribim el sistema associat a la darrera matriu ampliada, resulta:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{7}(-6+13z) \\ 0 & 1 & \frac{1}{7}(-16+9z) \end{array}\right) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{7}(-6+13z) \\ y = \frac{1}{7}(-16+9z) \end{array} \right\}$$

i això no és altra cosa que la solució expressada en funció del paràmetre z .

Podem expressar també la solució obtinguda en forma vectorial:

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{7}(-6+13z), \frac{1}{7}(-16+9z), z\right) = \left(-\frac{6}{7}, -\frac{16}{7}, 0\right) + z\left(\frac{13}{7}, \frac{9}{7}, 1\right)$$

NOTA: diferents procediments de càlcul poden portar a solucions d'aparença diversa, totes elles correctes.

1.7.b

$$\begin{aligned}
 &\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & -3 & -9 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -6 & -18 & 0 \end{array}\right) \\
 &\longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -18 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \\
 &\longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left. \begin{array}{l} x=1 \\ y=2z \\ t=-3u \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

En forma vectorial, la solució s'escriurà:

$$\begin{aligned}
 (x, y, z, t, u) &= (1, 2z, z, -3u, u) = (1, 0, 0, 0, 0) + z(0, 2, 1, 0, 0) + u(0, 0, 0, -3, 1) = \\
 &= (1, 0, 0, 0, 0) + [(0, 2, 1, 0, 0), (0, 0, 0, -3, 1)]
 \end{aligned}$$

1.7.d

$$\left. \begin{array}{l} x = -2 \\ y = \frac{7}{3} \\ z = -\frac{16}{3} \end{array} \right\}$$

1.8.c Per a invertir una matriu, podem utilitzar el Mètode de Gauss per a resoldre sistemes d'equacions. Interpretem la matriu a invertir com a matriu de coeficients, i escrivim la matriu identitat en comptes del vector de termes independents.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Procedim per Gauss fins a obtenir la matriu identitat al costat esquerra de la matriu anterior, això és, fins completar la resolució del sistema associat. A la part dreta tindrem la matriu inversa.

$$\begin{aligned}
 &\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \dots \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) \\
 &A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

1.8. (Altres solucions del problema 1.8) De manera semblant s'obté:

a.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

e.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b.

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

1.9 Càlcul de la matriu inversa:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 17 & -15 & -2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 7 & -7 & -1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -6 & -1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 - F_3 \\ F_1 - 2F_3}} \begin{pmatrix} 7 & -3 & 0 & | & 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & | & 0 & 1 & -1 \\ 5 & -6 & -1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{F_1 - 3F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & | & 0 & 1 & -1 \\ 5 & -6 & -1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \dots \\ & \dots \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & | & -7 & 27 & -14 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -7 & 3 \\ -7 & 27 & -14 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Per a resoldre el sistema, l'escriurem primer com a producte de matrius,

$$\begin{cases} 17x - 15y - 2z = 2 \\ 7x - 7y - z = -1 \\ 5x - 6y - z = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix} 17 & -15 & -2 \\ 7 & -7 & -1 \\ 5 & -6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'aquesta manera, es pot multiplicar a banda i banda de la igualtat per A^{-1} , i en resulta:

$$\begin{pmatrix} 17 & -15 & -2 \\ 7 & -7 & -1 \\ 5 & -6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{multipliquem per } A^{-1}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -7 & 3 \\ -7 & 27 & -14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ -41 \end{pmatrix}$$