

[títol_] Lliçó 5. Exercicis**[versió_]** Novembre 2008**[matèria_]** Moviments**[assignatura_]** Matemàtiques I**[centre_]** E. T. S. d'Arquitectura del Vallès - Universitat Politècnica de Catalunya**[url_]** <http://upcommons.upc.edu/ocw> <http://etsav.upc.edu/assignatures/mat01>**[fitxers_]** L5_E.pdf L5_Sol.pdf**[descripció_]** Problemes i solucions de moviments (isometries) al pla i a l'espai.**E5.1 Exercicis.**

5.1 Comproveu si són o no ortogonals les matrius següents. En cas afirmatiu, calculeu-ne la inversa corresponent.

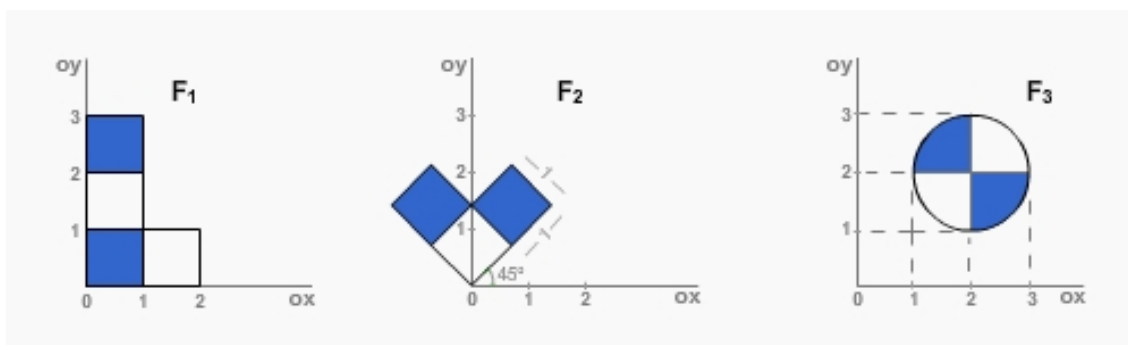
a. $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$	b. $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	c. $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
d. $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$	e. $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$	f. $\begin{pmatrix} -\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{6}} & \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \\ \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} & \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$
g. $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$	h. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	
i. $\begin{pmatrix} \frac{2+3\sqrt{3}}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{-3+2\sqrt{3}}{8} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{-3+2\sqrt{3}}{8} & \frac{1}{4} & \frac{6+\sqrt{3}}{8} \end{pmatrix}$	j. $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	

5.2 Digueu si les afinitats donades per les següents equacions són o no moviments.

<p>a.</p> $f(x,y) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \right)$	<p>b.</p> $f(x,y) = \left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + 2, \frac{1}{2}x + \frac{-1}{2}y - 1 \right)$
<p>c.</p> $f(x,y,z) = \left(\frac{x+y+z}{\sqrt{3}}, \frac{2x-y-z}{\sqrt{6}}, \frac{y-z}{\sqrt{2}} \right)$	<p>d.</p> $f(x,y,z) = \left(\frac{2x-y+2z-1}{3}, \frac{-x+2y+2z}{3}, \frac{2x+2y-z+1}{3} \right)$

5.3 Les equacions que trobareu a continuació representen alguns moviments del pla. Identifiqueu-los i descriu-ne l'efecte geomètric. Dibuixeu els transformats de les peces F_1 , F_2 i F_3 de la figura.

a. $f(x,y) = (-x, y)$	b. $f(x,y) = (x, -y+2)$	c. $f(x,y) = (-x-4, -y)$	d. $f(x,y) = (-y+2, x)$
e. $f(x,y) = (y, x)$	f. $f(x,y) = (-y+2, -x+2)$	g. $f(x,y) = (x+1, y-1)$	h. $f(x,y) = (y+1, -x+1)$



5.4 Proposeu referències adaptades a les següents rectes i plans.

Rectes del pla:

a. $x+y=0$	b. $y=1$	c. $x-2y=1$	d. $3x+4y=0$
------------	----------	-------------	--------------

Rectes i plans de l'espai:

e. $x+y+z=3$	f. $x-y+z=1$	g. $y-z=0$	i. $z=5$
k. $x = y = z$	h. $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}$	i. $\begin{cases} x-y-z=0 \\ x-y+z=1 \end{cases}$	j. $\begin{cases} x=y \\ z=5 \end{cases}$
m. $x = 2y-1 = z$			

5.5 Doneu la matriu, el vector de desplaçament i les equacions dels moviments del pla:

- a. Gir de centre $(1,-1)$ i angle $\pi/4$
- b. Gir de centre $(2,0)$ i angle $\pi/2$
- c. Simetria d'eix la recta que passa pel punt $(2,0)$ i que forma un angle de $\pi/4$ respecte de l'eix OX.
- d. Simetria d' eix la recta que passa pel punt $(2,0)$ i que forma un angle de $\pi/6$ respecte de l'eix OY.
- e. Simetria d'eix $3x-4y=0$
- f. Simetria central respecte del punt $(-1,1)$

5.6 En les equacions dels moviments del pla que apareixen a continuació, heu de determinar els punts P tals que $f(P)=P$ (punts fixos). Digueu també de quins moviments es tracta.

a. $f(x,y)=(-y+1, x-2)$	b. $f(x,y)=(y-1, x+1)$	c. $f(x,y)=(-x-2, -y)$	d. $f(x,y)=(y+1, x+1)$
-------------------------	------------------------	------------------------	------------------------

5.7 Matriu de la transformació ortogonal del pla que s'obté com a resultat d'aplicar successivament les transformacions:

1. Simetria axial deix $y=x$.
 2. Simetria axial d'eix $x=0$.
- Classifiqueu-la.

5.8 Quina és la matriu de la transformació ortogonal que s'obté com a resultat d'aplicar:

1. Una simetria especular respecte del pla d'equació $x=y$
 2. Una simetria axial respecte de la recta d'equació $x=y=z$
- El resultat obtingut, depèn de l'ordre? De quin moviment es tracta?

5.9 Doneu les matrius de les següents transformacions ortogonals de l'espai.

- a. Matriu de la simetria rotacional d'angle $\pi/2$ i eix la recta generada pel vector $(1,1,0)$
- b. Matriu del gir d'angle $\pi/6$ i eix la recta generada pel vector $(\sqrt{3}, 0, 1)$
- c. Matriu de la simetria rotacional d'angle $\pi/4$ i eix la recta generada pel vector $(-\sqrt{3}, 0, 1)$
- d. Matriu de la simetria especular respecte del pla $x + \sqrt{3}z = 0$

5.10 Doneu les equacions dels següents moviments de l'espai.

- a. Simetria especular respecte del pla $x+z=1$
- b. Gir d'angle $\pi/3$ i d'eix la recta $x=y, z=1$
- c. Simetria rotacional d'angle $\pi/4$, eix $z=y=1$ i punt fix $(0,1,1)$
- d. Gir d'angle $\pi/6$ i eix la recta $x-1=y=z+1$
- e. Simetria especular respecte del pla $x+y+z=3$
- f. Simetria rotacional d'angle $\pi/2$, sabent que $f(1,1,1)=(1,1,1)$ i $f(2,2,2)=(0,0,0)$.

5.11 Classifiqueu els moviments del pla següents:

a. $f(x,y) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{1}{2} \right)$

b. $f(x,y) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{1}{2} \right)$

5.12 Classifiqueu les transformacions ortogonals que tenen per matriu:

<p>a.</p> $\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$	<p>b.</p> $\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$
<p>c.</p> $\begin{pmatrix} \frac{2+3\sqrt{3}}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{-3+2\sqrt{3}}{8} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{-3+2\sqrt{3}}{8} & \frac{1}{4} & \frac{6+\sqrt{3}}{8} \end{pmatrix}$	<p>d.</p> $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$
<p>e.</p> $\begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	<p>f.</p> $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Quins són els seus elements geomètrics característics (plans de simetria, eixos de gir i angles)

5.13 Digueu quins moviments representen les equacions següents. Establiu-ne els punts P tals que f(P)=P (punts fixos).

<p>a.</p> $f(x,y,z) = \left(\frac{x+\sqrt{3}y+2\sqrt{3}}{2}, z+1, \frac{-\sqrt{3}x+y}{2} \right)$
<p>c.</p> $f(x,y,z) = \left(\frac{3x+2y+\sqrt{3}z-4}{4}, \frac{x-\sqrt{3}z+4}{2}, \frac{\sqrt{3}x-2\sqrt{3}y+z+4\sqrt{3}}{4} \right)$
<p>d.</p> $f(x,y,z) = \left(\frac{3x-2y+\sqrt{3}z}{4}, \frac{x-\sqrt{3}z+2}{2}, \frac{\sqrt{3}x+2\sqrt{3}y+z}{4} \right)$

5.14 Trobeu els punts Q tals que f(Q)=-Q (punts inversos respecte de f) pels moviments:

<p>a.</p> $f(x,y) = (-x+2 \quad -y+2)$	<p>b.</p> $f(x,y) = \left(\frac{3x+4y+5}{5}, \frac{4x-3y+10}{5} \right)$
--	---

c. $f(x,y,z) = \left(\frac{x+\sqrt{3}y}{2}, z, \frac{-\sqrt{3}x+y}{2} \right)$	d. $f(x,y,z) = \left(\frac{x-2y-2z+3}{3}, \frac{-2x+y-2z}{3}, \frac{-2x-2y+z-3}{3} \right)$
---	--

5.15 Comproveu que la composició de dues simetries axials del pla equival a un gir, de centre el punt d'intersecció dels eixos, i angle el doble del que formen els eixos. Què passa si aquests són paral·lels?

5.16 Si s'aplica primer una simetria axial, i a continuació un gir amb centre sobre el seu eix, quin moviment del pla en resulta? I si s'executen les mateixes operacions en ordre invers?

5.17 Raoneu per què el concepte de punt fix (i.e. punts P tals que $f(P)=P$) no depèn de la referència de treball. Doneu una demostració analítica d'aquest fet.

5.18 Un punt Q és invers respecte d'un moviment f si $f(Q)=-Q$. La propietat de ser invers respecte de f , depèn de la referència de treball? Justifiqueu la resposta amb exemples.