[títol_] **Lliçó 5. Exercicis**

[versió_] Novembre 2008
[matèria_] Moviments
[assignatura_] Matemàtiques I
[centre_] E. T. S. d'Arquitectura del Vallès - Universitat Politècnica de Catalunya
[url_] http://upcommons.upc.edu/ocw http://etsav.upc.edu/assignatures/mat01
[fitxers_] L5_E.pdf L5_Sol.pdf

[descripció_] Problemes i solucions de moviments (isometries) al pla i a l'espai.

E2.2 Solucions.

Solucions d'alguns exercicis de la llista E2.1

5.1 Són ortogonals les matrius dels apartats **a**, **c**, **e**, **f**, **g**, **h**, **i**, i **j**. Les seves inverses coincideixen amb les transposades (i.e. la matriu que s'obté canviant files per columnes).

Solució comentada de l'apartat f:

La matriu $M=\begin{pmatrix} -\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{6}} & \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \\ \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} & \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ és ortogonal perquè $MM^T=Id$ En efecte, en el cas present la transposada de M (M^T) coincideix amb la pròpia M ja es tracta d'una matriu simètrica. Resulta:

$$MM^T=\begin{pmatrix} -\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{6}} & \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \\ \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} & \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{6}} & \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \\ \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} & \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A més, hem provat també que $M^{-1} = M^T$

Solució comentada de l'apartat j:

La matriu $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ és ortogonal perquè $MM^T=Id$

La matriu M val, de fet, $M=\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ i la seva transposada $M^T=\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

El producte d'ambdues:

$$MM^T=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

A més de l'ortogonalitat de M, hem provat també que $M^{-1} = M^T$

5.2 Són moviments les transformacions dels apartats **a**, **c** i **d**. No ho és **b**.

Solució comentada de l'apartat d:
Comencem observant que la condició de ser moviment depèn només de la part lineal de la transformació. Per tant, n'hi ha prou amb estudiar-ne la matriu per decidir si estem o no davant d'un moviment .

$$f(x,y,z)=\left(\frac{2x-y+2z-1}{3},\ \frac{-x+2y+2z}{3},\ \frac{2x+2y-z+1}{3}\right)=\underbrace{\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}}_{\text{PART LINEAL}}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}+\underbrace{\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}}_{\text{DESPLAÇAMENT}}$$

En aquest cas, la matriu L de la part lineal és ortogonal, atès que L L^T=Id, i per tant la transformació f és un moviment.

5.3 Els moviments proposats són:

a. Simetria respecte de l'eix x=0 (eix OY)
b. Simetria respecte de l'eix y=1
c. Simetria central (gir d'angle pla) respecte del punt (-2,0)
d. Gir d'angle $-\pi/2$ i centre al punt (0,1)
e. Simetria d'eix y=x
f. Simetria central (gir d'angle pla) respecte del punt (1,1)
g. Translació de vector (1,-1)
h. Gir d'angle $\pi/2$ i centre al punt (1,0)

5.5

a. La matriu és $L=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$ El vector de desplaçament és $V=\begin{pmatrix}1-\sqrt{2}\\ -1\end{pmatrix}$

Les equacions són f(P)=LP+V, o sigui:

$$f(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1-\sqrt{2}\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}y+1-\sqrt{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}y-1\end{pmatrix}$$

$$f(x,y)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}y1-\sqrt{2}\ ,\ \ \frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}y-1\right)$$

d. La matriu és $L=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ El vector de desplaçament és $V=\begin{pmatrix}1\\ -\sqrt{3}\end{pmatrix}$

Les equacions són f(P)=LP+V, o sigui:

$$f(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ -\sqrt{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y+1\\ \frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y-\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

$$f(x,y)=\left(\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y+1,\ \ \frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y-\sqrt{3}\right)$$

e. La matriu és $L=\begin{pmatrix}\frac{7}{25} & \frac{24}{25}\\ \frac{24}{25} & -\frac{7}{25}\end{pmatrix}$ El vector de desplaçament és $V=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$

Les equacions són f(P)=LP+V, o sigui:

$$f(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{7}{25} & \frac{24}{25}\\ \frac{24}{25} & -\frac{7}{25}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{7}{25}x+\frac{24}{25}y\\ \frac{24}{25}x-\frac{7}{25}y\end{pmatrix}$$

$$f(x,y)=\left(\frac{7}{25}x+\frac{24}{25}y\ ,\ \ \frac{24}{25}x-\frac{7}{25}y\right)$$

f. La matriu és $L=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ El vector de desplaçament és $V=\begin{pmatrix}-2\\ 2\end{pmatrix}$

Les equacions són f(P)=LP+V, o sigui:

$$f(x,y)=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x-1\\ -y+1\end{pmatrix}$$

$$f(x,y)=(-x-1,\ \ -y+1)$$

Solució comentada de l'apartat **b**:

La matriu d'un gir de $\pi/2$ en qualsevol referència ortonormal del pla és $L=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

Per determinar-ne el vector de desplaçament $V=(v_1 , v_2)$, imposarem que el centre $C=(2, 0)$ és fix per la transformació: $f(C)=C$ Utilitzant les equacions, aquesta igualtat s'escriu com:

$$\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 0\end{pmatrix}$$

Resolent el sistema, resulta: $(v_1 , v_2) = (2 , -2)$

Per tant, les equacions són $f(x , y)=(-y+2 , x-2)$

Solució comentada de l'apartat **c** - matriu de simetria:
Se sap que, en qualsevol referència ortonormal del pla, la matriu de la simetria demanada és
$L=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix}$ on l'angle α és el de l'angle que formen la recta de simetria i l'eix OX.

Al nostre cas es tindrà que $\alpha=\pi/2$ i la matriu $L=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{2} & \sin\frac{\pi}{2}\\ \sin\frac{\pi}{2} & -\cos\frac{\pi}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

Per determinar el vector de desplaçament $V=(v_1 , v_2)$ Imposarem que els punts de l'eix són fixos. Qualsevol punt de l'eix serveix, per exemple $P=(2,0)$

$$f(2\,,\,0)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 0\end{pmatrix}$$

Resolent aquestes equacions, resulta $V=(2 , -2)$, i les equacions $f(x , y)=(y+2 , x-2)$

Solució comentada de l'apartat **c** - referència adaptada:
Disposem una referència S de la següent manera:
Origen sobre l'eix de simetria, per exemple, $A=(2,0)$
Primer vector, director de l'eix i normalitzat, $u_1=(\sqrt{2}/2\ ,\sqrt{2}/2)$
Segon vector, perpendicular a l'eix i normalitzat, $u_2=(-\sqrt{2}/2\ ,\sqrt{2}/2)$

Les imatges dels elements de S són:
$f(A) = A = (0 , 0)_S$ - vector de desplaçament.
$f(u_1) = u_1 = (1 , 0)_S$ - primera columna de la matriu D
$f(u_2) = -u_2 = (0 , -1)_S$ - segona columna de la matriu D

I per tant les equacions en aquesta referència adaptada resulten:

$$f(x',\,y')=\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}}_{D}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}+\underbrace{\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}}_{V}$$

on D és la matriu reduïda, V el vector de desplaçament en referència S, i $P=(x' , y')_S$ un punt qualsevol del que es vol calcular la imatge.

Ara, si el punt P està expressat en referència canònica $P=(x , y)$ farem:
1. canvi de canònica a S

2. multiplicació per D (simetria), i
3. canvi de S a canònica.

Les següents operacions amb matrius executen els passos anteriors:

$$f(x\,,\,y) = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}+\underbrace{\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}}_{M}\underbrace{\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}}_{D}\underbrace{\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}}_{M^{-1}}\left[\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\right]$$

on M i M^{-1} són les matriu del canvi de base, mentre que (2,0) està relacionat amb el canvi d'origen. El resultat final és:

$$f(x\,,\,y)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$$

5.6 a. Té un únic unt fix: (3/2,-1/2) Per tant, es tracta d'un gir de $-\pi/2$ al voltant d'aquest punt.
b. Punts fixos: tota la recta y=x+1 Serà per tant una simetria respecte d'aquesta recta.
c. Punt fix (-1,0). És una simetria central respecte del punt fix.
d. No té cap punt fix. És un desplaçament de vector (1,1).

5.7 Solució analítica: La matriu de la simetria axial d'eix y=x és $L=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, i la de la simetria d'eix x=0 és $M=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

Donat un punt P de coordenades (x,y), per aplicació consecutiva de L i M es transformarà en:

$$f(P)=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix}$$

Així, la transformació composta té per matriu el producte de les dues inicials, $N=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

i el moviment és un gir d'angle $\pi/2$ i centre l'origen de coordenades.

Solució geomètrica:
Clarament, la intersecció dels dos eixos de simetria és l'únic punt fix de la transformació composta. Per tant, ha de ser un gir de centre aquest punt, que és el (0,0).

Per determinar-ne l'angle, n'hi ha prou amb calcular el transformat d'algun punt. Especialment senzilles de calcular són les imatge dels punts de la recta x=y, atès que no es mouen per acció de la primera transformació. Així, per exemple, la imatge del punt (1,1) per la primera simetria és (1,1), que per la segona es transforma en (-1,1) (resulta clar si en feu un dibuix).

Considerant aquests punts com a vectors, formaran un angle de $\pi/2$, i per tant el moviment és un gir d'angle $\pi/2$ i centre (0,0)

5.8 Solució analítica - producte de matrius:
Com hem fet al problema anterior, multiplicarem la matriu L de la simetria de pla x=y per la matriu M de la simetria d'eix x=y=z.

Per trobar les matrius L i M podem seguir qualssevol dels dos mètodes standard (vegeu els problemes 5.9 i 5.10) Hem d'obtenir:

$$L=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix} \qquad M=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

Multiplicant-les:

$$L\,M=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\ -\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

i aquesta és precisament la matriu que se'ns demana. Observem que L M = M L, o sigui, que aquest resultat no depèn de l'ordre en que s'hagin executat els dos moviments.

Per classificar-la, seguim també el procés standard que es basa en trobar els punts fixos de la transformació associada a aquesta matriu (preneu com a exemple els problemes 5.12 i 5.13)

Resulta que el conjunt dels seus punts fixos formen un pla, d'equació $x+y-2z=0$. Per tant, ens trobem davant d'una simetria especular.

<u>Solució analítica - referència adaptada</u>:
Observem que la recta de simetria està continguda dins del pla de simetria, de manera que sembla possible de trobar una referència S adaptada a totes dues transformacions, i per tant també a la resultant.

Una tal referència $S = \{A; u_1, u_2, u_3\}$ s'obté prenent:

- A - el mateix origen de coordenades A=(0,0,0)
- u_3 - un vector director de la recta x=y=z
- u_1 i u_2 - perpendiculars a u_3 i simètrics respecte del pla x=y

Com es transformen els elements de S per l'acció consecutiva de les dues simetries?
(Nota: convé de fer un dibuix per seguir el raonament.)

f(A)=A, perquè és un punt de l'eix x=y=z, i tots els punts d'aquest eix són fixos tant per L com per M. Pel mateix motiu, $f(u_3) = u_3$ (és un vector director de l'eix).

$f(u_2)= -u_1$ perquè el simètric de u_2 respecte de la recta x=y=z és $-u_2$ (són perpendiculars), i el simètric de u_2 respecte del pla x=y és $-u_1$ Observem també que l'ordre no és rellevant, atès que simetritzar primer respecte del pla i després respecte de la recta ens hauria dut al mateix resultat. Per la mateixa raó, $f(u_1)=-u_2$

La matriu en referència S serà:

$$D=\begin{pmatrix}0&-1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

que representa una simetria respecte del pla x'=-y' (on x', y', z' són les coordenades en la nova referència S)

Ja hem obtingut i classificat el moviment resultant, si més no en la referència adaptada S que nosaltres mateixos hem introduït. Ara falta trobar-ne la matriu en referència canònica. Per a fer-ho, seguirem el procediment standard (determinar les coordenades dels elements A, u_1 u_2 i u_3

en referència canònica, i procedir per canvi de referència), tal i com s'explica en els problemes 5.9 i 5.10.

Clarament, A=(0,0,0) i u_3=(1,1,1) són tries acceptables per a l'origen i el tercer vector.
En quant a u_2 i u_1, hauran de ser:
- Perpendiculars a u_3 , i per tant les seves coordenades (x,y,z) han de satisfer x+y+z=0 [1]
- Simètrics respecte del pla x=y, i per tant si u_2=(x,y,z), llavors u_1=(y,x,z) [2]
- Perpendiculars entre sí. [3]

Aquestes condicions ens porten a resoldre el sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=0 & [1] \\ xy+yx+z^2=0 & [2] \text{ i } [3] \end{cases}$$

la solució del qual depèn d'un paràmetre, i val: $(x,y,z)=\left(t\cos(-\pi/12), t\sin(-\pi/12), -t/\sqrt{2}\right)$

Si donem a t el valor $t=\sqrt{2}$ llavors els vectors proposats són:

$$u_2=(x,y,z)=\left(\sqrt{2}\cos(-\pi/12), \sqrt{2}\sin(-\pi/12), -1\right)$$

$$u_1=(y,x,z)=\left(\sqrt{2}\sin(-\pi/12), \sqrt{2}\cos(-\pi/12), -1\right)$$

Finalment, procedim per canvis de referència i obtindrem la matriu en referència canònica de la manera habitual: N = M D M^{-1} on M es forma disposant u_1 u_2 i u_3 per columnes.

Solució geomètrica:
S'observa que tots els punts de l'eix x = y = z són fixos tant per la primera com per la segona transformacions. Són per tant punts fixos de la composició. De fet, aquesta condició es fa extensiva a tots els punts del pla que passa per la recta x = y = z i que és perpendicular al pla x = y.

Així, com que el conjunt dels punts fixos és un pla, es tracta d'una simetria especular respecte d'aquest pla.

L'equació del pla? Serà ax+by+cz = 0 amb (a,b,c) perpendicular a (1,1,1) (el vector director de la recta) i també a (1,-1,0) (el vector perpendicular al pla de la simetria). Per exemple, podem agafar (a,b,c)=(1,1,-2)

A partir d'aquí, el problema segueix alguna de les solucions standard com les que es proposen als exercicis 5.9 i 5.10.

5.9

a. $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}-6}{8} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{8} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{8} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{3\sqrt{2}-2}{8} \end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Solució comentada apartat **c**:
Si S={O; u_1, u_2 , u_3} és una referència adaptada al problema, de manera que:

O és l'origen de coordenades de la referència canònica. O=(0,0,0)

u_3 és el vector director de l'eix, normalitzat. u_3=$\left(\sqrt{3}/2 \text{ , } 0 \text{ ,} 1/2\right)$

u_2 és un vector qualsevol, perpendicular a u_3 i normalitzat. Per exemple, u_2=(0,1,0)

u_1 és perpendicular a u_2 i u_3, i normalitzat. Per exemple, prenem u_1 igual al producte vectorial de u_2 i u_3, $u_1=\left(-1/2\ ,\ 0\ ,\ \sqrt{3}/2\right)$

En referència S, la matriu de la transformació és:

$$D=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriu del canvi de referència de S a canònica s'obté posant els vectors de S en columnes:

$$M=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

i la seva inversa (canvi de canònica a S), tractant-se d'un canvi entre referències ortonormals, coincideix amb la transposada M^T. A més, com que M és simètrica, M i M^T són la mateixa matriu.

Finalment, la matriu L de la transformació que ens demana l'enunciat s'obté com a producte de tres matrius:

$$L = MDM^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}+6}{8} & \frac{1}{4} & \frac{2\sqrt{3}-3}{8} \\ -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{2\sqrt{3}-3}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3\sqrt{3}+2}{8} \end{pmatrix}$$

5.10 a. f(x,y,z)=(-z+1,y,-x+1)

b.

$$f(x\,,\,y\,,\,z) = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

c.

$$f(x\,,\,y\,,\,z) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

d.

$$f(x,y,z)=\begin{pmatrix}\frac{6+\sqrt{12}}{3\sqrt{12}} & \frac{-6+\sqrt{12}}{3\sqrt{12}} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{6+\sqrt{12}}{3\sqrt{12}} & \frac{-6+\sqrt{12}}{3\sqrt{12}}\\ \frac{-6+\sqrt{12}}{3\sqrt{12}} & \frac{1}{3} & \frac{6+\sqrt{12}}{3\sqrt{12}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{12}-2}{\sqrt{12}}\\ \frac{-2}{\sqrt{12}}\\ \frac{4-\sqrt{12}}{\sqrt{12}}\end{pmatrix}$$

<u>Solució comentada de l'apartat **e**</u>:
Comencem donant una referència adaptada al pla x+y+z=3.

Origen: A=(1,1,1) - un punt qualsevol del pla.
Base: $u_3=\left(1/\sqrt{3}\ ,\ 1/\sqrt{3}\ ,\ 1/\sqrt{3}\right)$ - vector normal al pla, normalitzat.

$u_2=\left(1/\sqrt{2}\ ,\ -1/\sqrt{2}\ ,\ 0\right)$ - un vector director del pla, normalitzat.

$u_1=\left(-1/\sqrt{6}\ ,\ -1/\sqrt{6}\ ,\ 2/\sqrt{6}\right)$ - el producte vectorial de u_2 i u_3 , que també és director del pla i perpendicular als dos anteriors.

La referència S ={ A ; u_1 u_2 u_3 } és una de les possibles adaptades al problema. És fàcil veure quines són les equacions en S, atès que:

$f(A) = A = (0\ 0\ 0)_S$ - A és del pla, i els punts del pla són fixos per la transformació.
$f(u_1) = u_1 = (1\ 0\ 0)_S$ - u_1 és vector director del pla.
$f(u_2) = u_2 = (0\ 1\ 0)_S$ - u_2 és un altre vector director del pla.
$f(u_3) = -u_3 = (0\ 0\ -1)_S$ - u_3 és perpendicular al pla, i es simetritza.

Com que f(A) és el vector de desplaçament, i $f(u_1)$, $f(u_2)$, $f(u_3)$ són les columnes de la matriu reduïda D, resulta:

$$f(x',y',z')=\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}}_{D}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}+\underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}}_{f(A)}$$

Ara, si P=(x,y,z) és un punt expressat en referència canònica, farem:

$$f(x,y,z)=\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}_{A}+\underbrace{\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}}_{M}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}}_{D}\underbrace{\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}}_{M^{-1}}\underbrace{\left[\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right]}_{(P-A)}$$

De dreta a esquerra:
- Canviem P de referència canònica a referència S
- Transformem el punt (només cal multiplicar-lo per la matriu D)
- Retornem de referència S a referència canònica.

El resultat de les operacions anteriors és:

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Solució comentada de l'apartat **f**:
Com que f(1,1,1) = (1,1,1) , aquest punt serà el centre de la simetria. D'altra banda, observem que (0,0,0) és el simètric de (2,2,2) respecte del centre (1,1,1). Per tant, i com que f(2,2,2)=(0,0,0), l'eix de la simetria haurà de passar per (0,0,0) i (2,2,2), essent-ne (1,1,1) un vector director.

Amb aquesta informació podem construir la referència adaptada, que coincideix amb la de l'apartat anterior (entre d'altres possibles tries):

Origen: A=(1,1,1) - el centre de la simetria.
Base: $u_3 = \left(1/\sqrt{3}\ ,\ 1/\sqrt{3}\ ,\ 1/\sqrt{3}\right)$ - vector director de l'eix, normalitzat.

$u_2 = \left(1/\sqrt{2}\ ,\ -1/\sqrt{2}\ ,\ 0\right)$ - un vector perpendicular a l'anterior, normalitzat.

$u_1 = \left(-1/\sqrt{6}\ ,\ -1/\sqrt{6}\ ,\ 2/\sqrt{6}\right)$ - el producte vectorial de u_2 i u_3 , que és perpendicular als dos anteriors.

La matriu D en referència adaptada és:

$$D = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & 0 \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si el punt P a transformar ens ve donat en referència canònica, P=(x,y,z), la següent seqüència d'operacions algèbriques ens donarà les coordenades del seu transformat:

$$f(x,y,z) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{A} + \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}}_{M^{-1}} \underbrace{\left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]}_{(P-A)}$$

Efectuant les operacions:

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{6+\sqrt{12}}{3\sqrt{12}} & \frac{6-\sqrt{12}}{3\sqrt{12}} \\ \frac{6-\sqrt{12}}{3\sqrt{12}} & -\frac{1}{3} & -\frac{6+\sqrt{12}}{3\sqrt{12}} \\ -\frac{6+\sqrt{12}}{3\sqrt{12}} & \frac{6-\sqrt{12}}{3\sqrt{12}} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

5.11 <u>Solució comentada de l'apartat **a**</u>:
És un gir, d'angle $\pi/6$ i centre $C=\left(-\sqrt{3}/2\ ,\ 1/2\right)$ (l'únic punt fix de la transformació). Per a veure-ho, escrivim les equacions en forma matricial:

$$f(x\,,\,y)=\underbrace{\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}}_{\text{part lineal L}}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+\underbrace{\begin{pmatrix}1-\sqrt{3}/2\\ 1/2\end{pmatrix}}_{\text{desplaçament V}}$$

La part lineal ens informa que es tracta d'un gir de $\pi/6$, i l'existència del vector V de desplaçament indica que el centre de gir no és l'origen de coordenades.

El centre C de gir és l'únic punt fix de la transformació, i s'obté resolent:

$$f(x\,,\,y)=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1-\sqrt{3}/2\\ 1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

que és un sistema d'equacions lineals:

$$\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y+1-\sqrt{3}/2=x\\ \frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{1}{2}=y\end{cases}$$

la solució del qual és, precisament, $C=(x\,,\,y)=\left(-\sqrt{3}/2\ ,\ 1/2\right)$

<u>Solució comentada de l'apartat **b**</u>:
És una simetria, d'eix $\left(\sqrt{3}-2\right)x+y=2-\sqrt{3}$
Aquesta recta és precisament el conjunt de punts fixos de la transformació f(x,y) = (x,y)

En efecte, les equacions:

$$f(x\,,\,y)=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\sqrt{3}/2-1\\ 1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

formen un sistema lineal de rang 1, del qual es pot suprimir una equació. Si prescindim de la segona, obtindrem l'eix $\left(\sqrt{3}-2\right)x+y=2-\sqrt{3}$.

b. És una simetria axial, d'eix la recta d'equació

5.12 Observacions:
1. Tractant-se de transformacions ortogonals, totes deixen fix l'origen de coordenades. Per tant, els eixos de gir i els plans de simetria passen tots per l'origen.
2. No es demana determinar el signe de l'angle en girs i simetries rotacionals.

a. Es tracta d'un gir d'angle $\pi/2$. L'eix té vector director $\left(\sqrt{3}/2\ ,\ 0\ ,1/2\right)$

b. És una simetria especular de pla $-\frac{1}{2}x+y+\frac{\sqrt{3}}{2}z=0$

c. Gir d'angle $\pi/6$ i vector director de l'eix $\left(1\ ,\ 0\ ,\sqrt{3}\right)$

d. Simetria rotacional centrada a l'origen de coordenades. Angle arcos(3/4) i eix segons el vector director $\left(1\ ,-\sqrt{3}\ ,\sqrt{3}\right)$

e. Gir d'angle arcos(3/4). L'eix té vector director $\left(\sqrt{3}\ ,1,-\sqrt{3}\right)$

f. Simetria rotacional centrada a l'origen. El vector director de l'eix és el (1,0,1), i l'angle $\pi/2$

Solució comentada apartat **b**:
Per començar, cal trobar els punts fixos de la transformació. Això equival a resoldre:

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

on P=(x,y,z), sistema que és equivalent a:

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{4}-1 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{1}{2} & 0-1 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{2}-1 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

S'observa les tres equacions són, en realitat, una de sola (perquè el rang de la matriu és 1, o bé com a resultat d'aplicar eliminació de Gauss):

$$-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}y+\frac{\sqrt{3}}{4}=0$$

Aquesta és l'equació d'un pla, i els seus punts són fixos per l'acció de la matriu.

Per tant, es tracta d'una simetria respecte d'aquest pla (simetria especular).

Solució comentada de l'apartat **d**:
Cerquem els punts fixos P=(x,y,z) bo i resolent el sistema:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

que equival a:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}-1 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0-1 & 1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aquestes tres equacions són independents (podeu calcular-ne el rang, o aplicar el mètode de Gauss), i per tant la solució és única. Com que (x,y,x)=(0,0,0) és solució, l'origen de coordenades serà l'únic punt fix. Ens trobem davant d'una simetria rotacional.

De moment, no hi ha res en les equacions anteriors que ens indiqui quin és l'eix de la transformació. Com que els punts de l'eix satisfan f(Q)=-Q, tornem a plantejar un sistema d'equacions per trobar-los:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$$

que és equivalent a:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}+1 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0+1 & 1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En aquest cas, el rang de la matriu de coeficients és 2. Aplicant eliminació gaussiana obtindrem un possible sistema equivalent amb només dues equacions (observeu que no és únic):

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}+1 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'escrivim en la forma habitual:

$$\begin{cases} \frac{3}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y=0 \\ y+z = 0 \end{cases}$$

i aquesta és precisament l'equació implícita d'una recta, la que formen els punts que satisfan f(Q)=-Q, l'eix de la simetria rotacional.

Finalment, l'angle s'obté aplicant la fórmula traça(L)=-1+2cos(α).

Com que traça(L)= 1/2 + 0 + 0 = 1/2 (la suma dels elements de la diagonal de la matriu original), resulta que α = arcos(3/4)

5.13 a. Simetria rotacional. Punt fix $P=\left(\sqrt{3},\ -1,\ 2\right)$ Eix paral.lel al vector $\left(1,\ -\sqrt{3},\ \sqrt{3}\right)$

b. El conjunt de punts fixos és el pla d'equació $-x+2y+\sqrt{3}z=4$ Per tant, es tracta d'una simetria respecte d'aquest pla.

c. Punts fixos: tots els de la recta per (-1, 1/2, 0) i vector director $\left(\sqrt{3},\ 0,\ 1\right)$.

Per tant és un gir. Angle: $\pi/2$

Solució comentada de l'apartat **d**:
Començarem cercant els punts fixos. Si P=(x,y,z) és fix, llavors serà solució del sistema:

$$f(x,y,z)=\left(\frac{3x-2y+\sqrt{3}z}{4}\ ,\ \frac{x-\sqrt{3}z+2}{2}\ ,\ \frac{\sqrt{3}x+2\sqrt{3}y+z}{4}\right)=(x\ ,\ y\ ,\ z)$$

En forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{4}-1 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{1}{2} & 0-1 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{4}-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Un estudi (Gauss o rangs) del sistema mostra que és compatible, i que la seva solució depèn d'un paràmetre. Els punts fixos P formen per tant una recta, i ens trobem davant d'un gir.

L'equació de l'eix de gir s'obté d'eliminar l'equació sobrant en el sistema anterior (Observació: com que no se'ns demana cap tipus especial d'equació de l'eix, donarem l'equació implícita i ens estalviarem de resoldre el sistema).

$$\begin{cases} -\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}y+\frac{\sqrt{3}}{4}z=0 \\ \frac{1}{2}x-y-\frac{\sqrt{3}}{2}z=1 \end{cases}$$

Finalment, l'angle ens el dóna la fórmula traça(L)=1+2cos(α).
Com que traça(L)= 3/4 + 0 + 1/4 = 1 (la suma dels elements de la diagonal de la matriu original), resulta que α val $\pm\pi/2$

5.14 Els punts Q tals que f(Q)=-Q són:
a. Cap
b. Tots els de la recta y=1-2x
c. Tots els de la recta per (0,0,0) i vector director $\left(1,-\sqrt{3},\ \sqrt{3}\right)$
d. Tots els del pla 2x+2y+2z=-3