[títol_] **Exercicis de matemàtiques I . Lliçó 3.**
[versió_] Novembre 2011
[matèria_] Corbes del pla. Les còniques.
[assignatura_] Matemàtiques I
[centre_] E. T. S. d'Arquitectura del Vallès - Universitat Politècnica de Catalunya
[url_]
[fitxers_] QT2011_L3_E_curt.pdf

[descripció_] Problemes i solucions sobre còniques i altres corbes del pla.

E3. Exercicis comentats

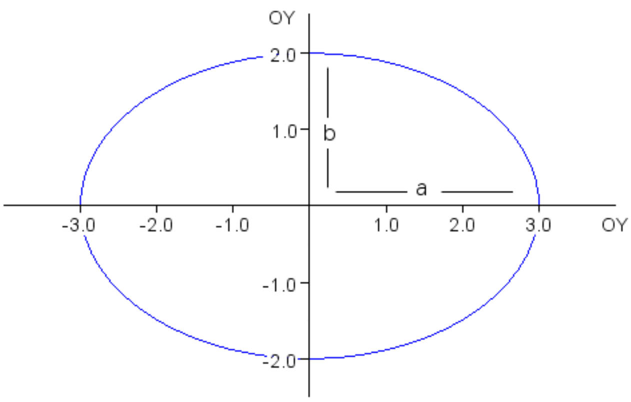
3.1 Enunciat. Identifiqueu i dibuixeu les còniques que tenen equacions reduïdes:

a. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

b. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$

c. $y^2=x$

Solució. a. És una el.lipse de centre $C=(0,0)$ i semieixos $a=3$ i $b=2$



Com s'ha obtingut? Sabem que l'equació reduïda (o canònica) d'una el.lipse és

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

on a i b són els semieixos, i el centre és l'origen de coordenades $C=(0,0)$.
Prenent $a=3$ i $b=2$ s'obté l'equació de l'enunciat.

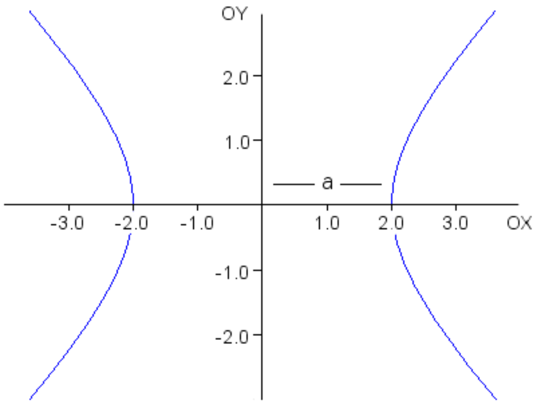
A més, la pròpia equació permet de deduir alguns aspectes de la corba:

- Els talls pels eixos de coordenades s'obtenen imposant $x=0$ (tall per l'eix OY), que dóna $y=\pm 2$, i imposant $y=0$ (tall per l'eix OX) que dóna $x=\pm 3$.

- La corba és simètrica respecte dels eixos de coordenades, atès que canviant x per $-x$ o y per $-y$ l'equació no varia.

-Com a consequència de la simetria respecte dels eixos de coordenades, tenim també simetria respecte de l'origen $C=(0,0)$ (el centre de la cònica).

b. És una hipèrbola de centre $C=(0,0)$, i semieixos $a=b=2$



<u>Com s'ha obtingut</u>? Sabem que l'equació reduïda (o canònica) d'una hipèrbola és

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

on a és el semieix sobre OX, i el centre és l'origen de coordenades $C=(0,0)$.

Prenent $a=2$ i $b=2$ s'obté l'equació de l'enunciat.

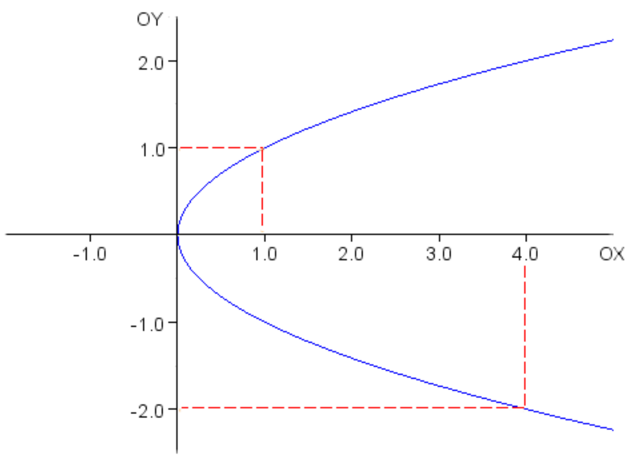
D'altra banda, la pròpia equació permet de deduir alguns aspectes de la corba:

- La figura talla l'eix OX en dos punts (quan y=0 es té que $x=\pm 2$), però no talla l'eix OY (quan s'imposa $x=0$, l'equació resultant $\frac{0^2}{2^2}-\frac{y^2}{2^2}=1$, o sigui, $y^2=-4$, no té solució)

- Simetria respecte dels eixos de coordenades: canviant x per $-x$ o y per $-y$ l'equació no varia.

-Com a conseqüència de la simetria respecte dels eixos de coordenades, tenim simetria respecte de l'origen $C=(0,0)$ (el centre de la cònica).

c. És una paràbola.



<u>Com s'ha obtingut</u>?

La forma reduïda (o canònica) d'una paràbola és l'equació $y^2=2px$

Prenent $p=\frac{1}{2}$ s'obté la de l'enunciat.

Alguns aspectes del dibuix que es poden deduir de l'equació:

- La figura talla els eixos en $V=(0,0)$.

- Simetria respecte de l'eix OY: canviant y per $-y$ l'equació no varia.

$\blacksquare$

<u>3.2 Enunciat</u>. Doneu les equacions d'una circumferència i d'una paràbola que passin pels punts $P=(1,0)$, $Q=(2,1)$ i $R=(2,-1)$. Són úniques?

<u>Solució</u>. Circumferència: $(x-2)^2+y^2=1$. Paràbola: $y^2=x-1$.

<u>Com s'ha obtingut</u>? Circumferència. Una circumferència qualsevol ve determinada pels seus centre i radi. Gràficament,o bé fent servir equacions de rectes i llurs interseccions, aquests elements es determinen traçant les mediatrius dels segment PQ i QR, que es tallen al centre de la circumferència.

Analíticament, l'equació $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$ presenta tres paràmetres x_0 , y_0 i r, que cal determinar bo i imposant que P, Q i R compleixin:

$(1-x_0)^2+(0-y_0)^2=r^2$ (P és de la circumferència)

$(2-x_0)^2+(1-y_0)^2=r^2$ (Q és de la circumferència)

$(2-x_0)^2+(-1-y_0)^2=r^2$ (R és de la circumferència)

La solució d'aquestes tres equacions ens proporciona el centre $C=(x_0,y_0)=(2,0)$ i el radi $r=1$.

Paràbola. Una paràbola es determina, per exemple, amb el seu vèrtex $V=(x_0,y_0)$ i el seu focus $F=(x_1,y_1)$. Això fa un total de quatre paràmetres a calcular. Com que només tenim tres punts de pas i, per tant, tres equacions, no aconseguirem de calcular-los tots quatre, i això vol dir que hi pot haver moltes paràboles que passin pels tres punts donats.

Si ens restringim, però, a les equacions reduïdes del tipus $(y-y_0)^2=2p(x-x_0)$ (les úniques que hem estudiat, però no les úniques existents), el sistema a resoldre és:

$(0-y_0)^2=2p(1-x_0)$ (P és de la paràbola)

$(1-y_0)^2=2p(2-x_0)$ (Q és de la paràbola)

$(-1-y_0)^2=2p(2-x_0)$ (R és de la paràbola)

sistema que té com a única solució $p=\frac{1}{2}$ $V=(x_0,y_0)=(0,0)$.

■

3.3 Enunciat. Identifiqueu, doneu l'equació reduïda, els vèrtexs, focus i altres elements geomètrics característics, i dibuixeu, les còniques que tenen equacions:

a. $4x^2+9y^2-16x+18y-11=0$

b. $2x^2-y^2+4x+2y=0$

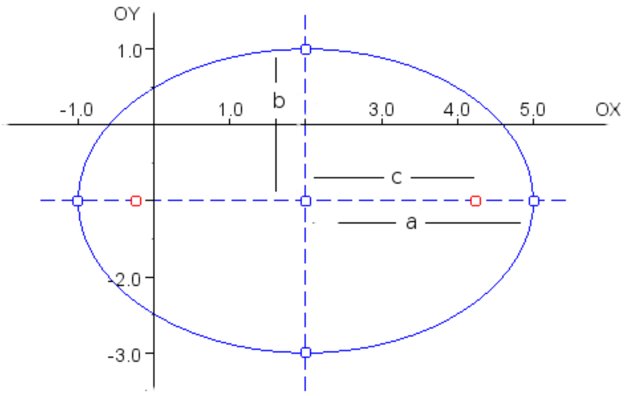
c. $x^2-4x-4y-8=0$

d. $x^2-y^2-2x+2y=0$

e. $x^2-y^2-2x+1=0$

Solució.

a. És una el.lipse d'equació reduïda $\frac{(x-2)^2}{3^2}+\frac{(y+1)^2}{2^2}=1$. El seu centre és $C=(2,-1)$, la distància del centre als focus val $c=\sqrt{5}$, els focus són els punts $F=(2+\sqrt{5},-1)$ i $F'=(2-\sqrt{5},-1)$ (en vermell a la figura), els eixos són la recta d'equació $x=2$ (eix vertical de simetria) i la recta d'equació $y=-1$ (eix horitzontal de simetria).



Els vèrtex són la intersecció dels eixos de simetria amb la pròpia cònica: $V_1=(5,-1)$ $V_2=(2,1)$ $V_3=(-1,-1)$ i $V_4=(2,-3)$.

<u>Com s'ha obtingut</u>? A partir de l'equació de l'enunciat, pel procediment de completar quadrats:

$4x^2+9y^2-16x+18y-11=0$

$4[x^2-4x]+9[y^2+2y]-11=0$ - treiem factor comú de manera que dins els parèntesis x^2 i y^2 quedin lliures de constants multiplicant .

$4[(x-2)^2-4]+9[(y+1)^2-1]-11=0$ - completem quadrats, fent servir que $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$.

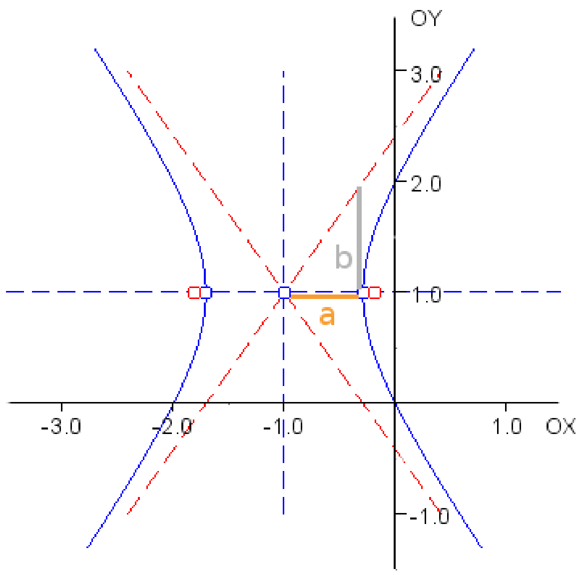
$4(x-2)^2+9(y+1)^2=36$ - sumem totes les constants i passem el resultat a l'altra banda.

$\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{4}=1$ - ho dividim tot per 36.

$\frac{(x-2)^2}{3^2}+\frac{(y+1)^2}{2^2}=1$ - finalment, expressem els denominadors com a quadrats.

Ara ja hi reconeixem l'equació reduïda d'una el.lipse. Els semieixos i el centre C es veuen directament a l'equació: $a=3$, $b=2$, $C=(2,-1)$. La distància del centre als focus c és calcula fent servir que $a^2=b^2+c^2$, d'on $c=\sqrt{5}$. La resta d'elements surten de traslladar aquestes distàncies sobre el dibuix, i de traçar-ne els eixos de simetria.

b. És una hipèrbola d'equació reduïda $\frac{(x+1)^2}{\left(1/\sqrt{2}\right)^2}-(y-1)^2=1$. El seu centre és $C=(-1,1)$, la distància del centre als focus val $c=\sqrt{3/2}$, els focus són els punts $F=(-1+\sqrt{3/2},\ 1)$ i $F'=(-1-\sqrt{3/2},\ 1)$ (en vermell a la figura), els eixos són la recta d'equació $x=-1$ (eix vertical de simetria) i la recta d'equació $y=1$ (eix horitzontal de simetria).



Els vèrtex són la intersecció dels eixos de simetria amb la pròpia cònica: $V_1=(-1+\sqrt{2},\ 1)$ i $V_2=(-1-\sqrt{2},\ 1)$

Les assímptotes són les rectes $y=1+\sqrt{2}(x+1)$ i $y=1-\sqrt{2}(x+1)$

<u>Com s'ha obtingut</u>? A partir de l'equació de l'enunciat, pel procediment de completar quadrats:

$2x^2-y^2+4x+2y=0$

$2[x^2+2x]-[y^2-2y]=0$ - treiem factor comú.

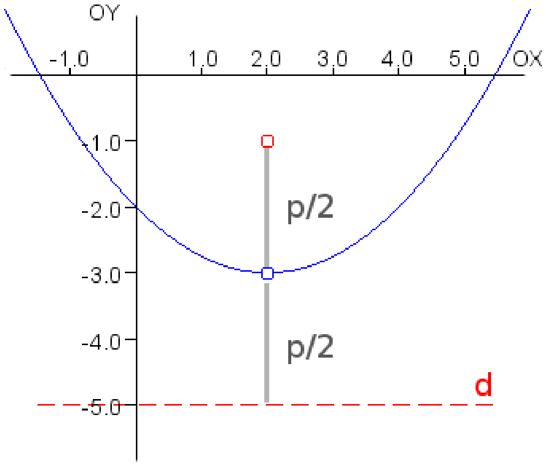
$2[(x+1)^2-1]-[(y-1)^2-1]=0$ - completem quadrats, fent servir que $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$.

$2(x+1)^2-(y-1)^2=1$ - sumem totes les constants i passem el resultat a l'altra banda.

$\dfrac{(x+1)^2}{\left(1/\sqrt{2}\right)^2}-(y-1)^2=1$ - finalment, expressem els denominadors com a quadrats.

Ara ja hi reconeixem l'equació reduïda d'una hipèrbola de centre $C=(-1,1)$, amb $a=1/\sqrt{2}$ i $b=1$. Com que és una hipèrbola, la distància c del centre als focus és calcula fent servir que $c^2=a^2+b^2$, d'on $c=\sqrt{3/2}$. Les assímptotes són rectes de pendent $\pm\dfrac{b}{a}$ que passen pel centre.

c. És una paràbola d'equació reduïda $(x-2)^2=8(y+3)$. El seu vèrtex és $V=(2,-3)$, l'eix de simetria és la recta $x=2$ i la directriu és la recta $y=-5$. La distància de la directriu al focus val $p=4$, i el focus és el punt $F=(2,-1)$.



<u>Com s'ha obtingut</u>? A partir de l'equació de l'enunciat, pel procediment de completar quadrats:

$[x^2-2x]-8y-20=0$ - agrupem les x.

$[(x-2)^2-4]-8y-20=0$ - completem quadrats per x, fent servir que $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$.

$(x-2)^2=8y+24$ - sumem totes les constants i passem el resultat a l'altra banda.

$(x-2)^2=8(y+3)$ - finalment, agrupem i treiem factor comú de les y.

Aquesta és l'equació reduïda de la paràbola, i d'aquí en surten el vèrtex, el focus, la directriu i l'eix de simetria. Per tal de dibuixar-la, és, etc (vegeu figura).

∎

E3. Exercicis proposats

3.4 Doneu l'equació de la circumferència:

a. Que té centre $C=(3,-2)$ i passa pel punt $P=(-1,1)$.
b. Que té els punts $P=(2,5)$ i $Q=(4,-1)$ com a extrems d'un diàmetre.
c. Que passa pels punts $P=(1,-1)$, $Q=(2,-2)$ i $R=(0,-2)$.

3.5 Doneu les equacions reduïdes, identifiqueu i dibuixeu les còniques següents:

a. $x^2+y^2-2x+6y+10=0$
b. $16x^2+16y^2-16x+24y-3=0$
c. $3x^2-2y^2+24x+12y+24=0$
d. $4x^2+y^2-16x+15=0$
e. $x^2-6x+2y+9=0$
f. $y^2-12y-8x+20=0$

3.6 Representeu la circumferència unitat $x^2+y^2=1$ com a:
a. La gràfica d'una funció y=f(x).
b. La gràfica d'una funció x=f(y).
c. Una corba paramètrica x=x(t), y=y(t).

3.7 Parametritzeu i dibuixeu la cònica $4x^2+9y^2-12x-18y+9=0$

3.8 Es considera l'el.lipse de semieix $a=2$ que té focus $F=(\sqrt{3},1)$ i $F'=(-\sqrt{3},1)$.
Doneu l'altre semieix **b**, les coordenades del centre i dels vèrtex, dibuixeu-la, doneu-ne l'equació implícita i una parametrització.

3.9 Les equacions $x=-4t^2+24t-34$ i $y=t-2$ parametritzen una paràbola. Trobeu-ne les equacions implícites, les reduïdes i els elements geomètrics característics (vèrtex, focus i directriu).

3.10 La cicloïde és la corba obtinguda en fer rodar una circumferència sobre una recta. Parametritzeu-la.

3.11 L'espiral d'Arquímedes és la corba que descriu una partícula que gira al voltant d'un punt central, bo i allunyant-se'n proporcionalment a l'angle escombrat. Parametritzeu-la en coordenades cartesianes i polars.

3.12 Comproveu que les equacions $x=a\cos(t)(1+\cos(t))$ i $y=a\sin(t)(1+\cos(t))$ són una parametrització de la corba d'equacions implícites $(x^2+y^2-ax)^2=a^2(x^2+y^2)$ (cardioïde) Doneu les seves equacions implícites en coordenades polars, i feu-ne un dibuix aproximat.

3.13 **a.** Parametritzeu el segment que uneix dos punts del pla P i Q.

b. Parametritzeu el moviment d'una partícula que viatja cíclicament de P a Q i de Q a P resseguint el segment que els uneix.

3.14 Una partícula es mou segons les equacions $x(t)=4\cos(2\pi t)$, $y(t)=\sin(4\pi t)$ (corba de Bowditch).

a. Dibuixeu el rectangle mínim que conté la trajectòria, i marqueu-hi els punts de contacte amb la corba.
b. Feu un dibuix aproximat de la trajectòria.
c. Doneu les equacions implícites de la corba.

3.15 Equació implícita de l'el.lipse de focus $F=(4,1)$ i $F'=(-2,1)$ que té excentricitat $\varepsilon=\frac{3}{5}$.
Doneu les coordenades del centre i els vèrtex. Feu-ne un dibuix aproximat on s'hi mostri aquests punts, i també els semieixos.

3.16 El semieix major de l'òrbita de la Terra té una longitud de 14.957.000 Km i la seva excentricitat és 0'0167. Troba les distàncies màxima i mínima de la Terra al Sol. (NOTA: la Terra descriu una òrbita el.líptica de la qual el Sol n'és un focus.)

3.17 Es vol construir un arc semiel.líptic d'altura 2m. Si es disposa d'una corda de 5m, a quina distància n'hem de clavar els extrems, i quina amplada tindrà la base?

3.18 Equació implícita de la paràbola de focus $F=(-1,-2)$ i directriu $y=2$. Parametritzeu-la i feu-ne un dibuix aproximat on s'hi mostri el focus, la directriu, el vèrtex i els punts de tall amb els eixos.

3.19 Doneu l'quació implícita i dues parametritzacions diferents de la paràbola de focus $F=(-2,0)$ i vèrtex $V=(-1,0)$. Calculeu-ne alguns punts de pas i dibuixeu-la.

3.20 El receptor d'una antena parabòlica es troba al seu focus, i a distància 1m del seu vèrtex. Trobeu l'equació de la secció de l'antena, i feu-ne un dibuix que mostri la referència que esteu fent servir.

3.21 Les equacions $x=1+t \quad y=1+5t-5t^2$ descriuen la trajectòria parabòlica d'un mòbil. Elimineu el temps t, doneu les equacions implícites i feu-ne un dibuix on s'hi mostrin tots els elements geomètrics característics (vèrtex, focus etc) amb les seves coordenades.

3.22 Doneu l'equació implícita de la hipèrbola que té assímptotes $y=\pm 2x+1$ i el punt $V=(1,1)$ com a un dels seus vèrtex.

3.23 Les equacions $x=\frac{t}{2}+\frac{1}{2t} \quad y=\frac{t}{2}-\frac{1}{2t}$ descriuen paramètricament una cònica. Quina?
Doneu-ne les equacions implícites, les implícites reduïdes, i feu-ne un dibuix on s'hi mostrin tots els elements geomètrics característics (vèrtex, focus etc) amb les seves coordenades.

3.24 Dos micròfons separats 2 Km registren una explosió. El so arriba al primer micròfon dos segons abans que al segon micròfon. Sabent que la velocitat del so per l'aire és 340 m/s, determineu el lloc de tots els possibles punts de l'explosió. Quants micròfons caldrien per determinar el punt precís de l'explosió

3.25 Comproveu que $xy=1$ és l'equació d'una hipèrbola (Indicació: expreseu-la en una referència adequada per tal d'obtenir l'equació reduïda)

3.26 Doneu l'equació implícita que s'obté de $x=1+\frac{1}{t}$ $y=t-1$ per el.liminació del paràmetre t. De quina cònica es tracta? Dibuixeu-la.