[títol_] **Lliçó 4. Exercicis**

[versió_] Octubre 2008
[matèria_] Transformacions afins.
[assignatura_] Matemàtiques I
[centre_] E. T. S. d'Arquitectura del Vallès - Universitat Politècnica de Catalunya
[url_] http://upcommons.upc.edu/ocw http://etsav.upc.edu/assignatures/mat01
[fitxers_] L4_E.pdf L4_Sol.pdf

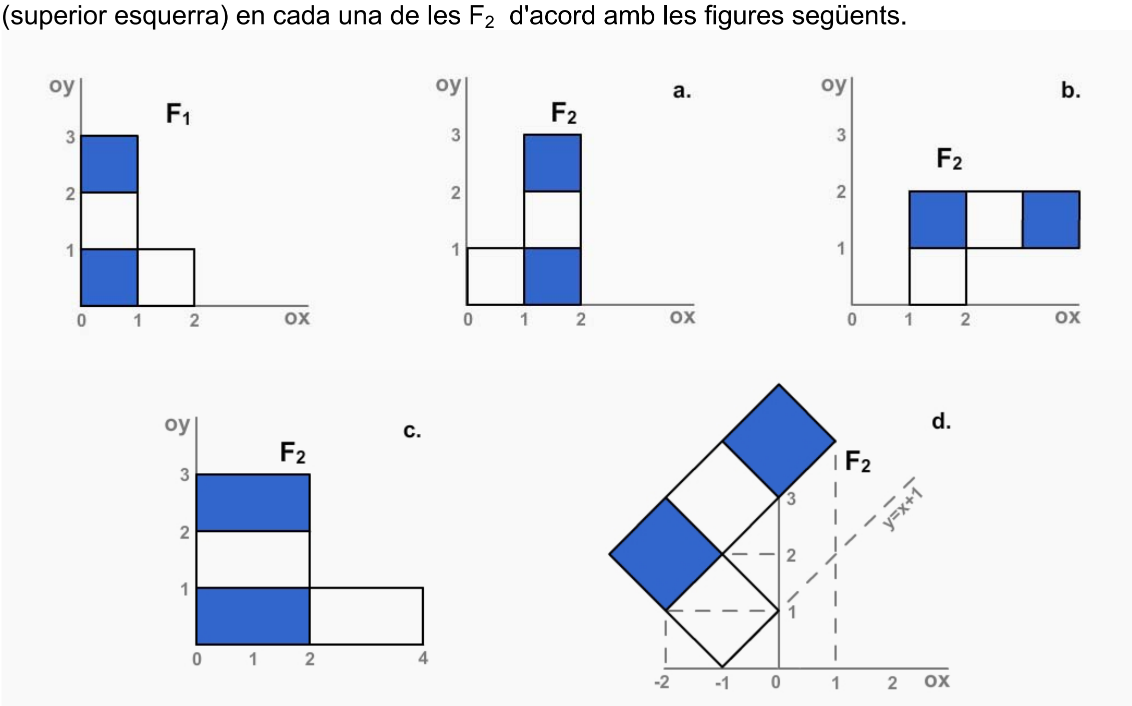
[descripció_] Problemes i solucions sobre transformacions lineals i afins al pla i a l'espai.

E4.1 Exercicis.

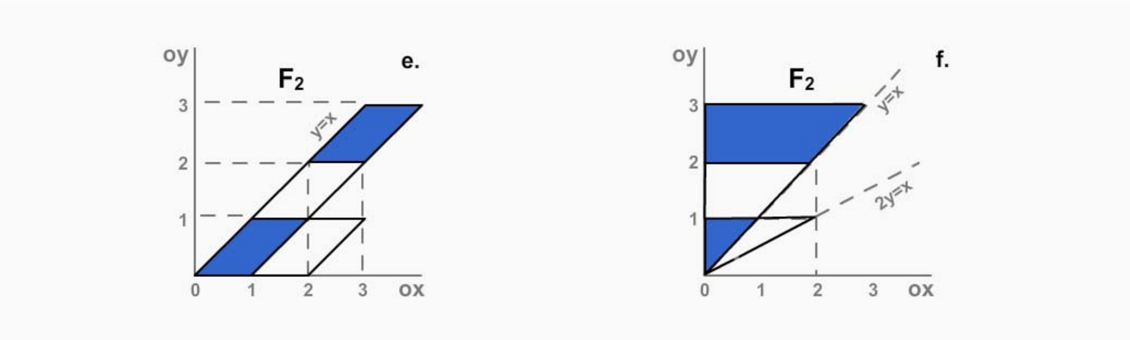
4.1 Per a les següents funcions, digueu entre quins espais estan definides i si són lineals, afins, o cap de les dues coses. Doneu, en els cassos lineal i afí, la matriu i el vector de desplaçament.

a. $f(x,y,z)=x+y+z$
b. $f(x,y)=xy$
c. $f(x)=(x,2x,3x)$
d. $f(x,y)=(x+y,x-y,2x)$
e. $f(x)=(x,x^2)$
f. $f(x,y)=x^2+y^2$
g. $f(x)=k$, (k escalar constant)
h. $f(x,y)=(2x-3y+1,x-y)$
i. $f(x,y,z)=(1,x,x+y+z)$
j. $f(x,y,z)=(0,x,x+y+z)$

4.2 Doneu les equacions d'algunes aplicacions del pla en sí mateix que transformin la peça F_1 (superior esquerra) en cada una de les F_2 d'acord amb les figures següents.



D. Boixader, M.A. Congost
J. Recasens // 2008



Indicació: per l'apartat f, resoleu primer el problema 4.14

4.3 Considereu les aplicacions f(x,y)=(x+2y,2x+y) i g(x,y)=(x,xy).

a. Comproveu que f és lineal i que g no ho és.
b. Dibuixa el quadrat unitat i la seva imatge per f i per g.

c. Dibuixeu les imatges de les rectes
{(x,k) / x qualsevol, k=0,1,2,...}
{(k,y) / y qualsevol, k=0,1,2,...}
per les dues aplicacions i compareu-les.

4.4 Sigui f la transformació del pla definida per f(x,y)=(x+4y,2x+y). Com que f és lineal, transforma rectes en rectes.

a. Dibuixeu la bisectriu del primer-tercer quadrant i la seva transformada. Doneu-ne les equacions paramètriques.
b. Feu el mateix amb la recta x=2y.

4.5 Sigui f la transformació del pla definida per f(x,y)=(xy,2x+y). f no és lineal, i és possible que algunes rectes es transformin en corbes.

a. Dibuixeu la bisectriu del primer-tercer quadrant i la seva transformada. Doneu-ne les equacions paramètriques.
b. Feu el mateix amb la recta x=2y.

4.6 Doneu la matriu i les equacions de l'aplicació lineal f que satisfà f(1,1)=(-1,1) i f(1,-1)=(1,1)

4.7 Equacions de la transformació afí f tal que f(0,0)=(1,1), f(1,1)=(0,2) i f(1,-1)=(2,2)

4.8 Equacions de la transformació afí f tal que f(1,0)=(-2,2), f(1,1)=(-1,2) i f(0,1)=(-1,1)

4.9 Quines són la matriu i les equacions d'una aplicació lineal f tal que f(1,0)=(-1,2) i f(0,1)=(0,1)? A partir d'aquí, raoneu quines serien les equacions d'una transformació afí g tal que g(0,0)=(1,1), g(1,0)=(0,3) i g(0,1)=(1,2)

4.10 Hi ha alguna aplicació lineal que compleixi f(1,1)=(1,-1) f(1,-1)=(0,1) i f(0,2)=(1,1)?

4.11 Considereu la següent afinitat f:

$$f(x,y)=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ -2\end{pmatrix}$$

a. Comproveu que (2,0) és un punt fix. En té algun altre?
b. Doneu una referència en la que f sigui lineal. És única?

4.12 Considereu l'afinitat que té per equacions:

$$f(x,y)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 2\end{pmatrix}$$

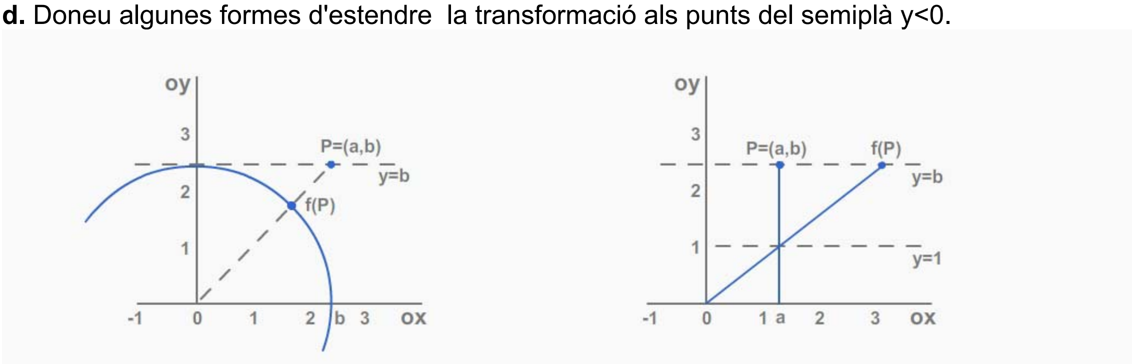
a. (1,-1) és un punt fix de f. Comproveu-ho. En té més?
b. Proposeu referències en les que f sigui lineal.

4.13 Definim una transformació del pla mitjançant el següent procediment: cada punt P=(a,b) del semiplà y≥0 es projecta sobre la circumferència de radi b (o -b, segons correspongui) des de l'origen de coordenades O (vegeu la figura de sota).

a. Equacions de la transformació. És afí?
b. Està definida la imatge de l'origen de coordenades O?
c. Té punts fixos? I rectes (o semirectes) fixes?
d. Comprova que les rectes horitzontals es transformen en semicircumferències.
e. Doneu alguna transformació que estengui l'anterior als punts del semiplà y<0.

4.14 Definim una transformació del pla mitjançant el següent procediment: cada punt P=(a,b) del semiplà y≥0 es projecta verticalment sobre la recta y=1, i el punt obtingut es torna a projectar des de l'origen de coordenades O sobre la recta y=b (vegeu la figura).

a. Equacions de la transformació. És afí?
b. Té punts fixos? I rectes fixes?
c. Comproveu que les rectes verticals es transformen en radials per l'origen.
d. Doneu algunes formes d'estendre la transformació als punts del semiplà y<0.



4.15 Doneu la matriu i el vector de desplaçament en referència S de l'afinitat que en referència canònica ve donada per

$$f(x,y)=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

on $S=\{A=(0,0);\ \vec{u}_1=(1,1),\ \vec{u}_2=(-1,1)\}$. Descriviu geomètricament l'acció de f.

4.16 Interpreteu geomètricament l'acció de la transformació afí f que en referència S té per matriu

$$D=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

on $S=\{A=(0,1);\ \vec{u}_1=(1,1),\ \vec{u}_2=(-1,1)\}$ Doneu-ne la matriu i el vector de desplaçament en referència canònica.

4.17 L'aplicació lineal f que té per matriu

$$L=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

satisfà f(2,1)=(2,1) i f(-1,1)=(0,0). Comproveu-ho, interpreteu la seva acció sobre el pla i doneu la matriu D de f en la base formada per (2,1) i (-1,1).

4.18 Per a cada una de les següents transformacions afins de l'espai:

a. Simetria respecte al pla x-y+z=1
b. Simetria respecte de l'eix x-1=y=z+1
c. Simetria respecte del punt P=(1,2,0)
d. Projecció sobre el pla x-y+z=1
e. Projecció sobre la recta x-1=y=z+1

doneu referències en les que les seves equacions no tinguin vector de desplaçament, i les matrius prenguin forma diagonal.

4.19 Considereu la següent transformació de l'espai. Cada punt P=(a,b,c) es projecta segons la direcció del vector (1,1,1) sobre el pla d'equació x+y+z=1 (es un exemple de **perspectiva cilíndrica**). Es demana:
a. Les equacions de la transformació.
b. És una afinitat? Matriu i vector de desplaçament.
c. Quin és el seu conjunt de punts fixos

4.20 A l'espai tridimensional, projectem un punt P=(a,b,c) sobre el pla x+y+z=1 des de l'origen de coordenades (es tracta d'un exemple de **perspectiva cònica**). Es demana:
a. Les equacions de la transformació.
b. Justifiqueu que no és una afinitat.
c. Doneu la imatge d'un conjunt de rectes paral.leles i observeu que es tallen en un punt (fuga).

4.21 Considereu tres punts no alineats del pla P, Q i R, i l'afinitat que envia P al punt mig del segment PQ, Q al punt mig de QR i R al punt mig de RP. Doneu-ne les equacions i proveu que el baricentre M del triangle PQR és fix per la transformació.

4.22 Considereu tres punts no alineats del pla P, Q i R, i l'afinitat que envia P a Q, Q a R i R a (una rotació generalitzada). Doneu-ne les equacions i proveu que el baricentre M del triangle PQR és l'únic punt fix per la transformació.

4.23 Donats quatre punts independents de l'espai (i.e. no coplanaris, 3 a 3 no alineats) P, Q, R i S, es considera l'afinitat que, deixant fixos P, Q i R, envia S a R. Doneu-ne les equacions, i proveu que es tracta d'una projecció sobre el pla que determinen P, Q i R, segons la direcció del vector RS.

Nota: els problemes 4.17, 4.18 i 4.19 són trets de M. Hausner, 'A vector Space Approach to Geometry'