

[Llibre 3. Coordenades no lineals.]

EXERCICIS QP 2013

① Coordenades cartesianes dels punts del pla:

$$\sqrt{2} \quad 1_{60^\circ} \quad 3_{270^\circ} \quad 1_{\frac{3\pi}{4}}$$

$$\sqrt{6} \quad 1_{30^\circ} \quad 1_{-\frac{\pi}{3}} \quad 1_{30^\circ} \quad 2_{\frac{\pi}{6}} \quad \text{Dibuixeu-los.}$$

② Coordenades polars dels punts del pla:

$$(x, y) = (1, 1) \quad (\text{en cartesianes}) \quad (-1, 2)$$

$$" \quad (-1, 1) \quad (" \quad " \quad) \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{etc} \quad (-1, -1) \quad \text{etc} \quad \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

$$(1, -1) \quad \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{Dibuixeu-los.}$$

③ Coordenades polars i cartesianes dels vèrtex

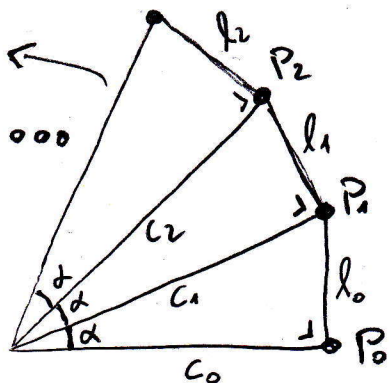
d'un (a) pentàgon (b) hexàgon (c) Octògon

(d) dodecàgon, regulars i centrats a l'origen.

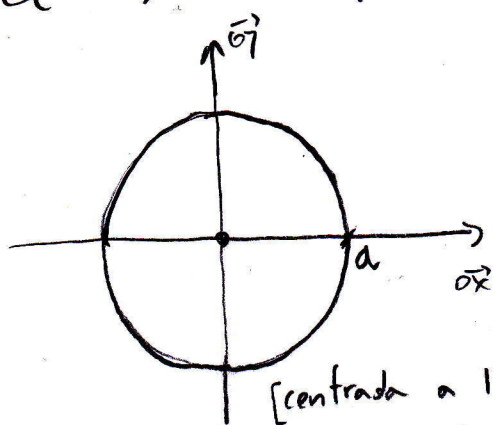
Dibuixeu-los.

(e) Feu el mateix per un polígon regular de n costats, si té el primer vèrtex sobre l'eix \vec{Ox} .

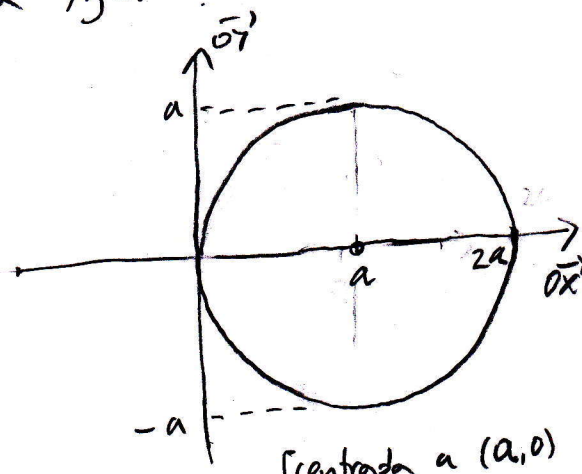
4) Coordenades polars i cartesianes dels punts P_k obtinguts per la sèrie de triangles rectangles adjacents que mostra la figura:



5) Les equacions implícites en coordenades cartesianes de les circumferències de la figura:



[centrada a l'origen,
radi a]



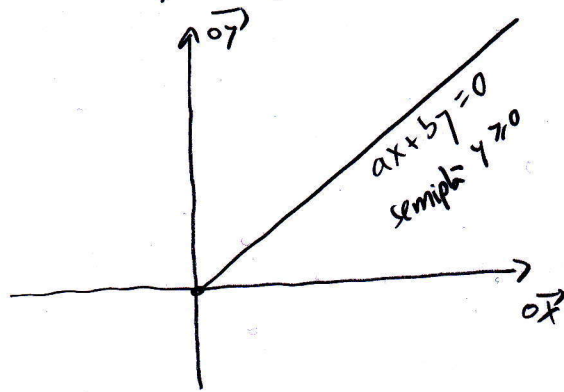
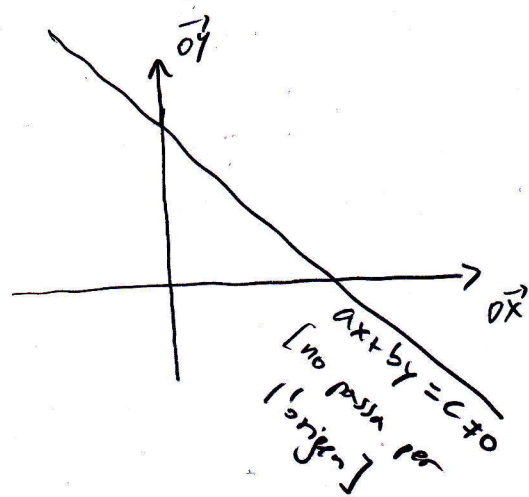
[centrada a $(a,0)$
radi a]

SSu $x^2 + y^2 = a^2$ i $x^2 - 2ax + y^2 = 0$ respectivament.

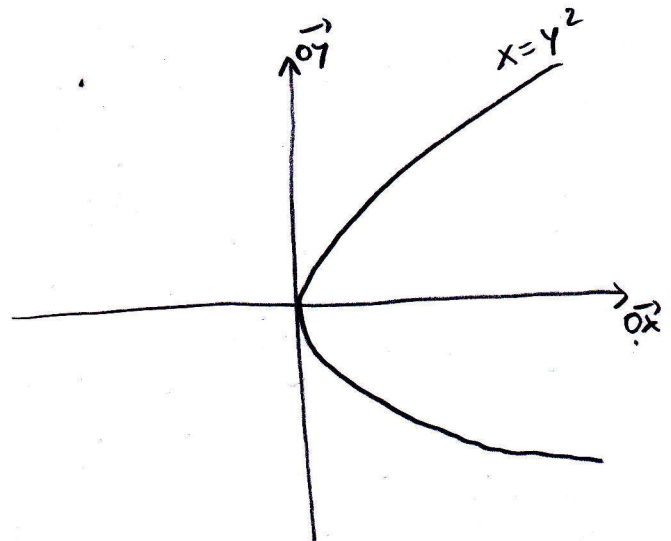
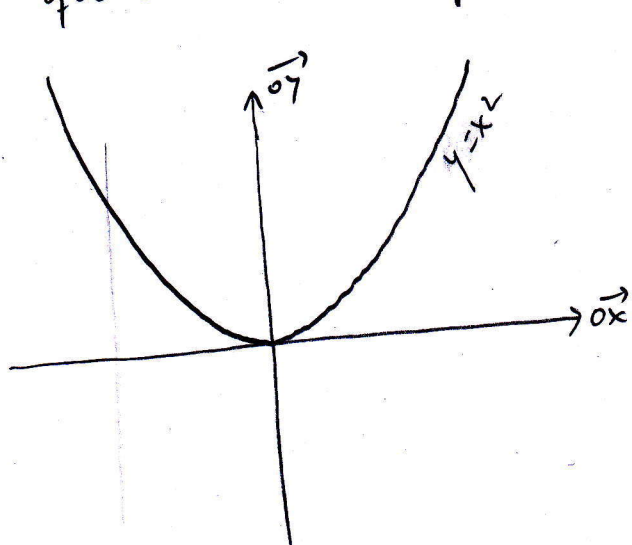
Doneu-ne les equacions implícites en coordenades polars.

6) Doneu les equacions en coordenades polars d'una recta del pla $ax+by=c$ ($c \neq 0$)

i d'una semirecta $ax+by=0, y \geq 0$.



7) Expressen les equacions implícites $x^2=y$ (a) i $y^2=x$ (b) en coordenades polars. Feu-ne un dibuix que mostri l'angle i el radi d'un punt qualsevol. Quin problema trobeu en el cas (b)?



Comenteu les diferències entre (a) i (b).

8) Per tal de poder representar el·lipsees introduïm les coordenades el·liptiques

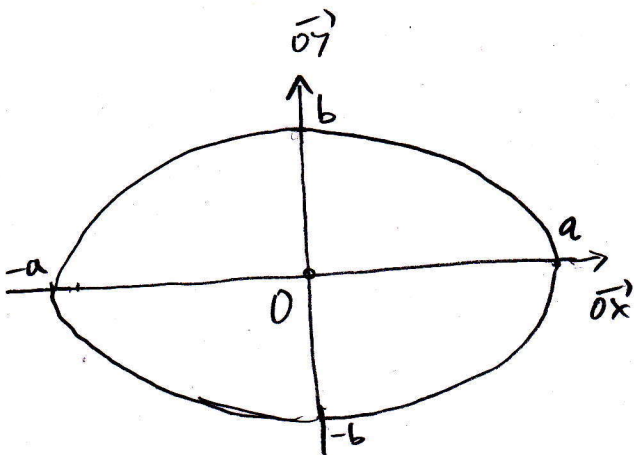
$$\left\{ \begin{array}{l} x = ar \cos \theta \\ y = br \sin \theta \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (0 \leq r < \infty \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi) \end{array}$$

que són una modificació de les polars. (a, b positius i constants)

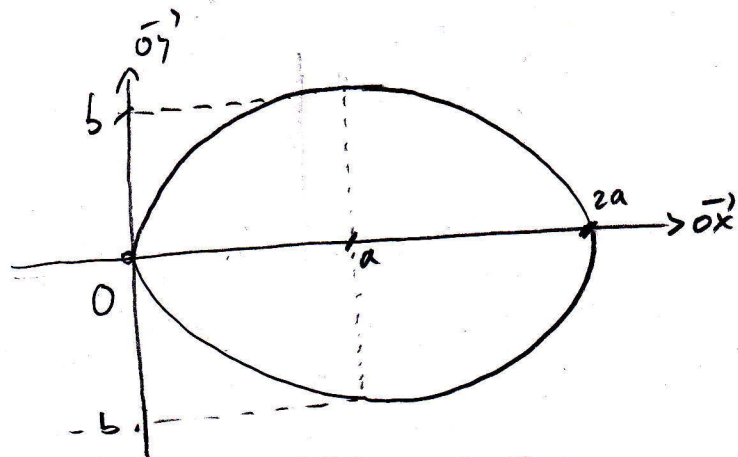
Trieu a i b adequats per representar les el·lipsees:

(i) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

(ii) $\frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + y^2 = 0$



[figura cas (i)]



[figura cas (ii)]

(9) Dibuixeu el recinte R del pla definit per

$$R: \begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{cases}$$

on (x, y) representen les coordenades cartesianes d'un punt qualsevol de R .

(Nota: és un rectangle)

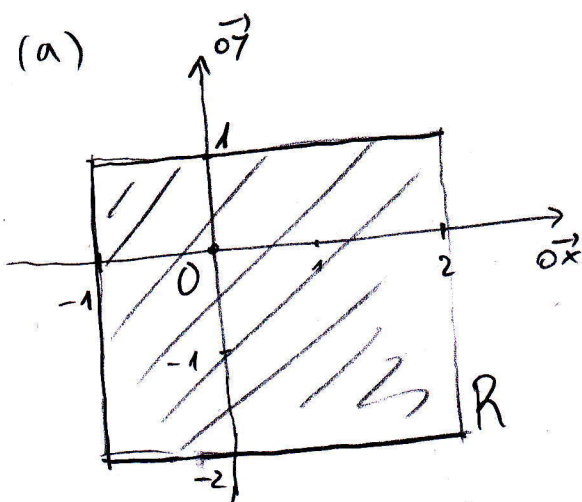
(10) Dibuixeu el recinte R del pla definit per

$$R: \begin{cases} a \leq r \leq b & (a, b \text{ positius}) \\ c \leq \theta \leq d & (0 \leq c \leq d \leq 2\pi) \end{cases}$$

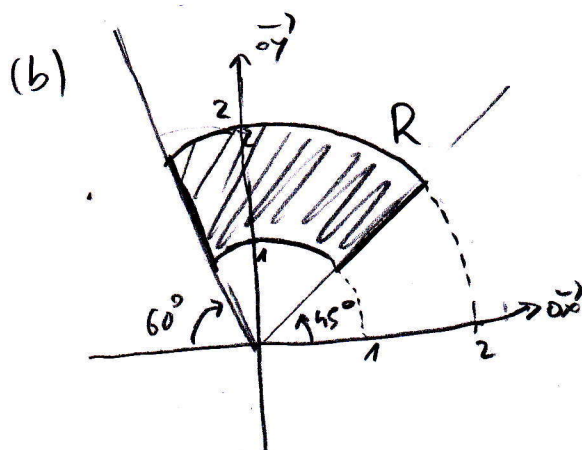
on r representa el radi i θ l'angle de les coordenades polars d'un punt qualsevol de R .

(Nota: és un sector de corona circular)

(11) Descriu els recintes de les figures:

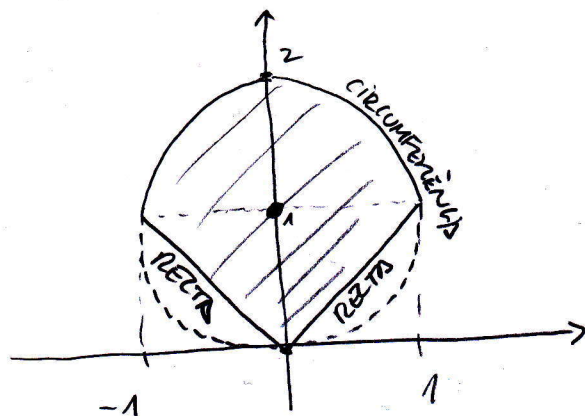


En coordenades cartesianes



En coordenades polars

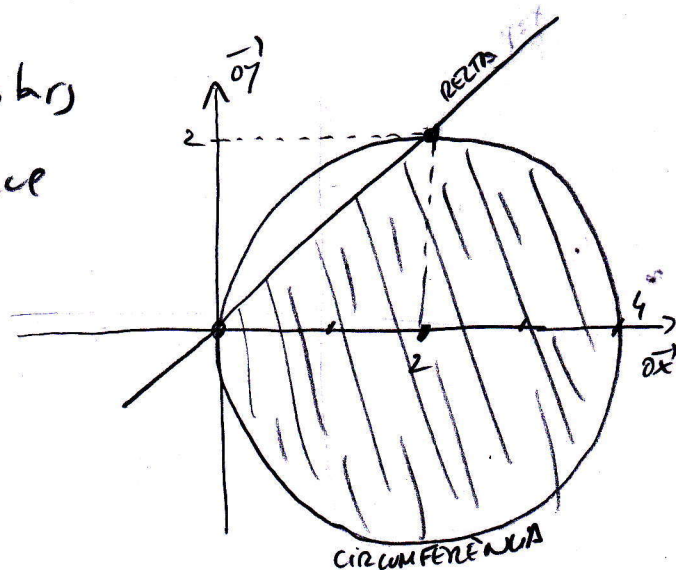
- 12) Descriu en coordenades polars i cartesianes el recinte:



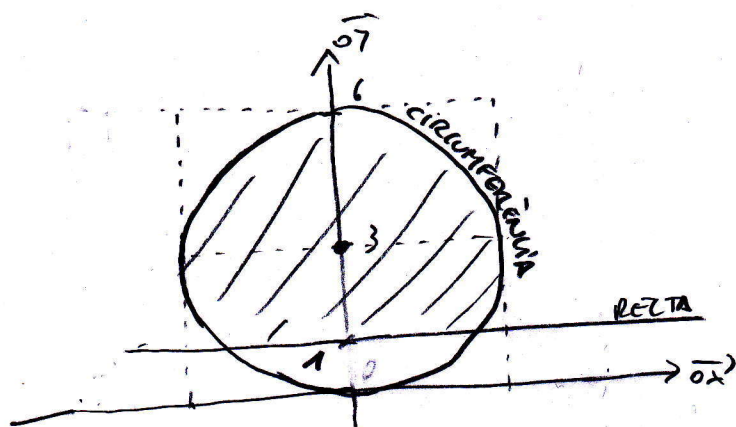
- 13) Dibuixeu i descriu en coordenades cartesianes i polars el recinte del pla limitat inferiorment per la paràbola $y=x^2$ i superiorment per la recta $y=1$.

- 14) Dibuixeu i descriu en coordenades polars el recinte exterior a la circumferència $x^2+y^2=1$, i interior al triangle de vèrtex $(0,0)$, $(2,2)$ i $(-2,2)$.

- 15) Descriu en coordenades polars i cartesianes el recinte que mostra la figura



16) Descriu en coordenades cartesianes i polars:



17) El mateix per l'àrea comuna a les circumferències

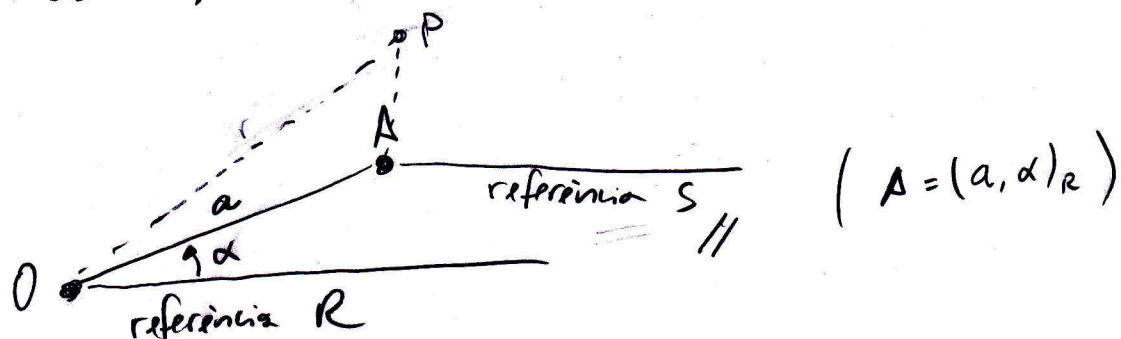
$$x^2 + y^2 \leq 4 \quad (\text{centre } (0,0) \text{ i radi } 2)$$

$$x^2 - 4x + y^2 \leq 0 \quad (\text{centre } (2,0) \text{ i radi } 2)$$

Feu el dibuix.

18) Doneu la relació entre les coordenades polars

d'un punt $P = (r, \theta)_R = (r', \theta')_S$ respecte als dos sistemes de referència polars de la figura.



20) Coordenades cilíndriques dels punts de l'espai que tenen coordenades cartesianes:

$$(x, y, z) = (1, 1, 1) \quad (x, y, z) = (1, 1, -1)$$

$$(x, y, z) = (-1, 0, 1) \quad (x, y, z) = (1, 1, 0)$$

Dibuixeu-los indicant l'angle θ i el radi r .

21) Coordenades esfèriques dels punts de l'espai que tenen coordenades cartesianes:

$$(x, y, z) = (1, 1, 1) \quad (x, y, z) = (0, -1, 0)$$

$$(x, y, z) = (1, 1, \sqrt{2}) \quad (x, y, z) = (0, 0, 1)$$

Dibuixeu-los indicant ρ , θ i φ .

22) Coordenades cartesianes dels punts de l'espai:

$$(r, \theta, z) = (2, -\frac{\pi}{2}, 1)_{\text{cil}} \quad (r, \theta, z) = (1, \frac{\pi}{4}, 0)_{\text{cil}}$$

$$(r, \theta, z) = (1, 30^\circ, 0)_{\text{cil}} \quad (r, \theta, z) = (5, 270^\circ, 1)_{\text{cil}}$$

$$(\rho, \theta, \varphi) = (1, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})_{\text{esf}} \quad (\rho, \theta, \varphi) = (2, 0, \frac{\pi}{4})_{\text{esf}}$$

$$(\rho, \theta, \varphi) = (1, 0^\circ, 90^\circ)_{\text{esf}} \quad (\rho, \theta, \varphi) = (1, 270^\circ, 135^\circ)_{\text{esf}}$$

Dibuixeu-los.