Lliçó 1: SISTEMES D'EQUACIONS LINEALS

1.1 Què són i què representen.

1.2 Alguns exemples.

1.3 Resolució: el mètode de Gauss.

1.4 Anàlisi de les solucions: el T^a de Rouché.

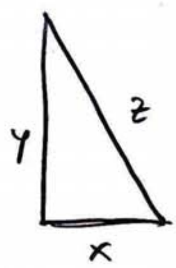
1.5 Sistemes d'eqcs. lineals i inversió de matrius.

1.1. QUÈ SÓN I QUÈ REPRESENTEN ELS SISTEMES D'EQUACIONS LINEALS

Un sistema és un conjunt d'equacions

Les equacions expressen condicions (igualtats) que han de satisfer unes variables desconegudes $x, y, z \dots$ (incògnites).

p. ex. $x^2+y^2=z^2$ expressa la relació entre els costats d'un triangle rectangle (T.ª de Pitàgores)



Si, a més, volem que y sigui el doble de llarg que x, ho expressem com $y=2\cdot x$.

I ja tenim un sistema:

$$\left.\begin{array}{ll} [1] & x^2+y^2=z^2 \\ [2] & y=2\cdot x \end{array}\right\}$$

2 equacions
3 incògnites x, y, z.

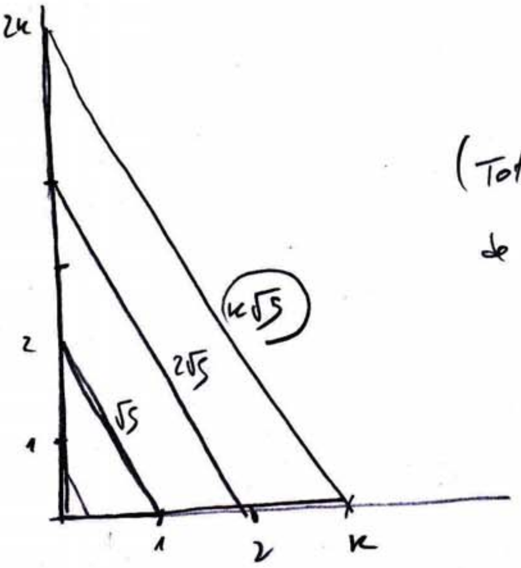
Les solucions són conjunts (parells, ternes...) de valors que satisfan totes les equacions.

p. ex. $x=1 \quad y=2 \quad z=\sqrt{5}$ és una solució

$x=2 \quad y=4 \quad z=2\sqrt{5}$ " "

$\boxed{x=k \quad y=2k \quad z=k\sqrt{5}}$ infinites solucions que depenen d'un paràmetre $k>0$.

[OBSERV: aquest sistema NO és lineal]



(Tots el triangles rectangles de l'exemple anterior)

Un sistema d'equacions és lineal si admet una expressió com a producte de matrius del tipus:

$$\underbrace{A}_{\text{MATRIU DE COEFT.}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ \vdots \end{pmatrix}}_{\text{incòg.}} = \underbrace{\begin{pmatrix} m \\ n \\ \vdots \end{pmatrix}}_{\text{TERME INDEPT.}}$$

amb tots els elements d'A constants.

p. ex.

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ -x + y + 2z &= 0 \end{aligned}\right\}$$ es pot escriure com

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{MATRIU DE COEFICIENTS CONSTANTS } A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{TERMES INDEPENDENTS}}$$

Abreujadament, ho escriurem com

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \quad \text{MATRIU AMPLIADA, } (A \,\vdots\, m)$$

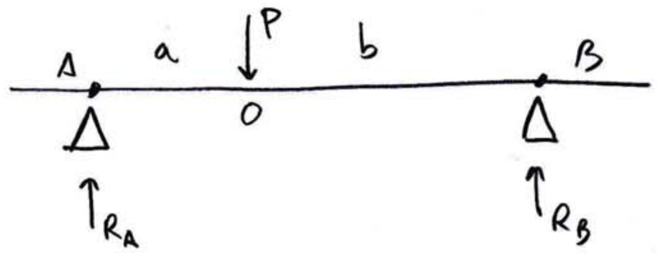
Diem que el sistema és <u>homogeni</u> si els termes independents valen zero $m = n = \dots = 0$.

Les solucions dels sistemes lineals representen punts, vectors, forces... Ho veurem més endavant.

1.2 ALGUNS EXEMPLES

Exemple 1.

Biga amb càrrega puntual en equilibri



P: càrrega puntual

A, B: recolzaments

Les forces en A i B (reaccions) han de neutralitzar P:

$R_A + R_B = P$ [eq 1]

Les reaccions provoquen una tendència a girar respecte a O que s'ha de neutralitzar:
(palanques, moments)

$aR_A = b\,R_B$ [eq 2]

Sistema: $\left.\begin{array}{l} R_A + R_B = P \\ aR_A - bR_B = 0 \end{array}\right\}$ 2 eqs, 2 incòg. (R_A, R_B)

Represent. matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & -b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R_A \\ R_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix}$$

p.ex. $a = 2m$ $b = 3m$ $P = 1000\,kg$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R_A \\ R_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} R_A \\ R_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1000 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 400 \\ 600 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓ ÚNICA
sistema ISOSTÀTIC

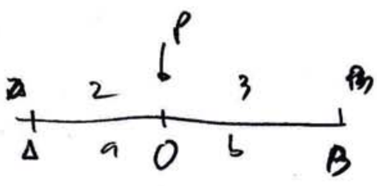
Observacions.

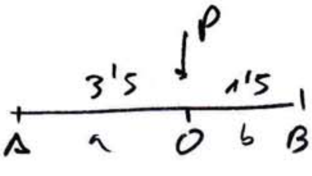
La matriu $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -3\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{3}{5} & \frac{1}{5}\\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5}\end{pmatrix}$ és un "MODEL" per al problema de la biga amb càrrega puntual P_1. Si variem la càrrega P, simplement hem de multiplicar per M^{-1} i obtindrem la distribució de pesos.

$$\boxed{\begin{pmatrix}R_A\\ R_B\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3/5 & 1/5\\ 2/5 & -1/5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P\\ 0\end{pmatrix}}$$

MODEL MATEMÀTIC DE LA BIGA, $a=2$, $b=3$.

La matriu $\begin{pmatrix}1 & 1\\ a & -b\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{b}{a+b} & \frac{1}{a+b}\\ \frac{a}{a+b} & -\frac{1}{a+b}\end{pmatrix}$ és un "MODEL PARAMÈTRIC" per a una família de problemes:





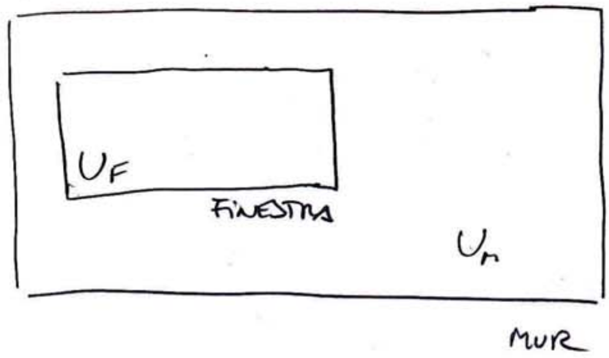
etc.

(Explicar el concepte de model matemàtic d'un problema real. }
" que estructures molt més complicades es modelitzen de manera semblant - amb una gran matriu que cal invertir)

Exemple 2 (Arcadi de Bobes)

Volem obrir una finestra en un mur.

El problema consisteix en calcular l'eficiència energètica del sistema mur-finestra combinat.



U: coeficient de transmissió combinat.

U_F : coeft. de trans. finestra

U_M : " " " mur.

Intuitivament, resulta clar que com més petita és la finestra, més s'acosta U a U_M, i com més gran, més s'acosta a U_F.

Els valors pràctics habituals són: $U_F = 1'7, \text{----}, 5$ (VIDRE)

$U_M = 0'2, \text{----}, 0'8$ (FÀBRICA DE MAÓ AMB AÏLLANT)

BO ⟶ DOLENT

Si S_F i S_M representen les superfícies de la finestra i del mur de maó, respectivament, la primera equació serà:

[1] $S = S_F + S_M$ (on S és la superfície total)

Obtindrem la segona equació imposant proporcionalitat respecte de les superfícies en la transmissió de calor:

$$[2] \quad U_F \cdot S_F + U_M \cdot S_M = U \cdot S$$

com més grans, més compten.

Situació habitual: coneixem U_F, U_M i S, i volem calcular S_F i U. Per exemple, $U_F = 2'5$ $U_M = 0'4$ $S = 10$. (prescindim d'unitats)

$$\left.\begin{array}{ll} [2] & 2'5 \cdot S_F + 0'4 \cdot S_M = U \cdot 10 \\ [1] & 10 = S_F + S_M \end{array}\right\}$$

sistema lineal amb
2 eqcs
3 incògnites S_F, S_M i U

El sistema no està determinat. És intuitivament clar que sigui així: per cada mida de finestra S_F, tenim una mida de paret S_M i un coeficient de transmissió combinat U.

Així, si la finestra fa 2 (m^2, per exemple), resulta:

$$\left.\begin{array}{l} 2'5 \cdot \boxed{2} + 0'4 \cdot S_M = U \cdot 10 \\ 10 = \boxed{2} + S_M \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Resolent}} \left\{\begin{array}{l} S_M = 8 \\ U = 0'82 \end{array}\right.$$

Però una finestra més gran, p. ex. $S_F = 4$ (m^2, per exemple) tindrem:

$$\left.\begin{aligned} 2'5\cdot\boxed{4} + 0'4\cdot S_M &= U\cdot 10 \\ 10 &= \boxed{4} + S_M \end{aligned}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{aligned} S_M &= 6 \\ U &= 1'24 \end{aligned}\right.$$

En general:

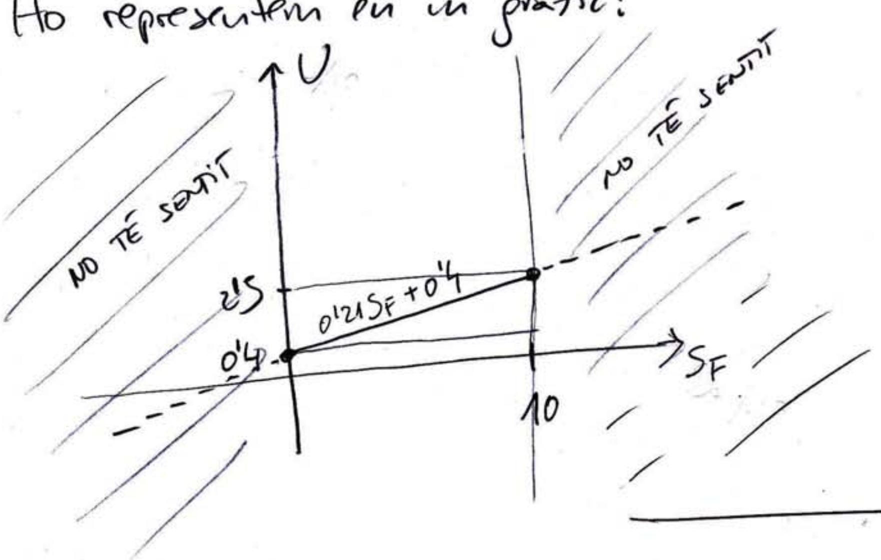
$[1] \longrightarrow S_M = 10 - S_F$

i substituint això a l'altra equació:

$[2] \longrightarrow 2'5\cdot S_F + 0'4\cdot(10 - S_F) = U\cdot 10 \longrightarrow$

$\longrightarrow \boxed{U = 0'21\cdot S_F + 0'4}$ DEPENDÈNCIA DE U RESPECTE LA MIDA DE LA FINESTRA S_F

Ho representem en un gràfic:



Exemple 3 (MITJANES PONDERADES)

L'exemple anterior fa servir la idea de mitjana ponderada entre finestra i paret per calcular l'índex combinat U.

Una mitjana (ponderada) m d'un conjunt de valors $x, y, z \dots$ és una combinació d'aquests valors multiplicats per coeficients:

$$m = \alpha x + \beta y + \gamma z + \dots \quad [1]$$

Per ser una mitjana, cal que $\alpha + \beta + \gamma + \dots = 1$

Observeu que [1] té l'aspecte d'una equació lineal, encara que, normalment, coneixem d'entrada els valors $x, y, z \dots$ Però no sempre és així.

p. ex. La qualificació final del curs de Matemàtiques I s'obté amb 4 notes, que valen el 10%, el 30%, el 45% i el 15% del total. Es demana:

a. Expressió de la nota final x_F del curs, si les notes x_1, x_2, x_3, x_4 de cada prova parcial es donen entre 0 i 10

b. Quina nota final x_F màxima i mínima pot treure un estudiant amb $x_1 = 10$, $x_2 = 4$, $x_4 = 10$?

Solució: a. Com que $10\% + 30\% + 45\% + 15\% = 100\%$

els coeficients per fer la nota final (mitjana ponderada)

seran: $\alpha_1 = \frac{10}{100}$ $\alpha_2 = \frac{30}{100}$ $\alpha_3 = \frac{45}{100}$ $\alpha_4 = \frac{15}{100}$

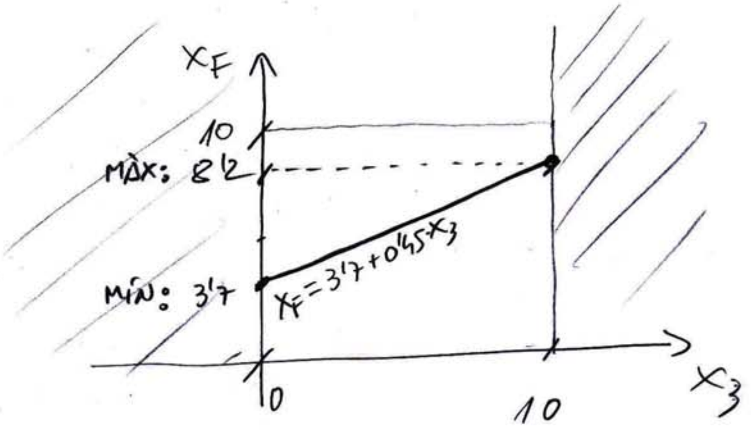
de manera que estarà garantit $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1$

$$\boxed{X_F = 0'1 \cdot x_1 + 0'3 \cdot x_2 + 0'45 \cdot x_3 + 0'15 \cdot x_4}$$

b. Si $x_1 = 10 = x_4$ i $x_2 = 4$, resulta:

$$X_F = 0'1 \cdot 10 + 0'3 \cdot 4 + 0'45 \cdot x_3 + 0'15 \cdot 10 =$$
$$= \boxed{3'7 + 0'45 \cdot x_3}$$

Dibuixem x_F en funció de x_3 (recta)



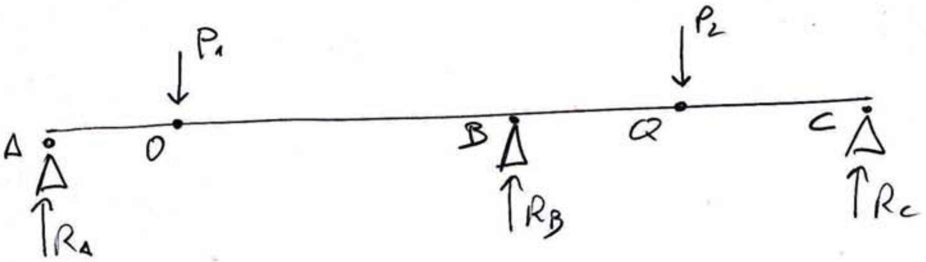
OBSERVACIÓ: podem convertir qualsevol combinació de variables $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$ amb $\alpha_i > 0$ en una mitjana fent: $m = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} x_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} x_2 + \dots + \frac{\alpha_n}{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} x_n$

perquè els coefs. ...... sumen 1.

Exemple 4

Què passa si afegim reaccions a una biga carregada?

Tornem a l'exemple 1, però amb una situació una mica diferent:



Per tal de "reforçar" la biga, hi afegim un suport.

Les equacions són ara:

[1] $R_A + R_B + R_C = P_1 + P_2$ (equilibri de forces)

Si prenem moments (palanques) respecte del punt B:

$$R_A \cdot \overline{AB} + P_2 \cdot \overline{BQ} = R_C \cdot \overline{BC} + P_1 \overline{OB} \quad [2]$$

on $\overline{AB}$, $\overline{OB}$, etc (distàncies) són dades del problema

P_1. P_2 (càrregues) també " " " "

i es desconeixen les reaccions R_A, R_B i R_C.

p. ex. $\overline{AO} = 1$ $\overline{OB} = 3$ $\overline{BQ} = 1'5 = \overline{QC}$ (m)

$P_1 = 1000$ $P_2 = 750$ (kg.)