$$[1] \quad R_A + R_B + R_C = 1750$$
$$[2] \quad R_A \cdot 4 + 750 \cdot 1'5 = R_C \cdot 3 + 1000 \cdot 3$$

2 EQCS
3 INCÒGNITES

$$\left.\begin{array}{l} R_A + R_B + R_C = 1750 \\ 4R_A - 3R_C = 1875 \end{array}\right\}$$

El sistema és indeterminat (en estàtica, s'anomena HIPERESTÀTIC)

Això vol dir que hi ha moltes reaccions R_A R_B R_C que són solució del sistema.

La situació és difícil d'interpretar físicament. En donem dues explicacions:

(1) En una situació ideal, podem triar una de les reaccions, p. ex. $R_B = 500$, i les altres dues es reequilibraran per respondre a aquesta R_B:

$$\left.\begin{array}{l} R_A + R_C = 1750 - R_B \\ 4R_A - 3R_C = 1875 \end{array}\right\}$$

Això equival a deixar R_B com a paràmetre en la solució.

$$\boxed{\begin{array}{l} R_A = 1017'85 - \frac{3}{7} R_B \\ R_C = 732'15 - \frac{4}{7} R_B \end{array}}$$

Observem que, com més gran és R_B, més petites esdevenen R_A i R_C, atès que la suma de les tres val $R_A + R_B + R_C = 1750$.

(2) La nostra experiència amb problemes semblants ens diu que les reaccions R_A, R_B i R_C no són indeterminades, sinó que prenen uns valors concrets. Per què passa això? La única possibilitat és que hi hagi alguna cosa que no estem tenint en compte.

Efectivament, no estem considerant les condicions ELÀSTIQUES de la biga. La biga es deforma elàsticament, i es generen més equacions que completen el sistema anterior, determinant-ne el resultat. (Problema HIPERESTÀTIC, solució: ELASTICITAT)

Les equacions que surten no són lineals, i no les estudiem. (Fins a ESTRUCTURES III).

1.3 RESOLUCIÓ: EL MÈTODE DE GAUSS.

Seguim amb l'exemple:

$$\left.\begin{array}{ll}[1] & x + y + z = 1 \\ [2] & -x + y + 2z = 0\end{array}\right\}$$

Quines operacions podem fer per calcular x, y i z?

Operacions permeses

① Multiplicar una equació per una constant ($\neq 0$)

[2] $-x + y + 2z = 0$ és la mateixa condició que

[2'] $10[-x + y + 2z] = 10 \cdot 0$

ó $-10x + 10y + 20z = 0$ (multipliquem per 10 a cada banda de =)

② Sumar dues equacions.

$$\begin{array}{ll}[1] & x + y + z = 1 \quad + \\ [2] & -x + y + 2z = 0 \\ \hline [3] & \cancel{0x} + 2y + 3z = 1\end{array}$$

L'equació [3] pot substituir la [1] o la [2], però <u>no totes dues</u>.

El sistema $\left.\begin{matrix}[1]\\ [2]\end{matrix}\right\}$ té les mateixes solucions

que $\left.\begin{matrix}[1]\\ [3]\end{matrix}\right\}$ i que $\left.\begin{matrix}[2]\\ [3]\end{matrix}\right\}$.

Però l'equació [3] tota sola té més solucions!

(3) Canviar dues equacions d'ordre

$$\left.\begin{matrix}[1] & x+y+z=1\\ [2] & -x+y+2z=0\end{matrix}\right\} \text{ equival a } \left.\begin{matrix}[2] & -x+y+2z=0\\ [1] & x+y+z=1\end{matrix}\right\}$$

Només podem fer aquestes <u>3 operacions</u>.

[<u>NOTA</u>: ocasionalment, intercanviarem dues incògnites, per exemple:

$$\left.\begin{matrix}x+z+y=1\\ -x+z+2y=0\end{matrix}\right\}$$

però al final del procés <u>haurem de desfer el canvi</u>.]

Aplicant aquestes tres transformacions, podem fer zeros sota (o sobre) la diagonal principal, amb l'objectiu de poder aïllar les incògnites.

Això és conegut com a mètode de Gauss-Jordan.

MATRIUS AMPLIADES $\xleftrightarrow{\text{EQUIVAL.}}$	EQUACIONS
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$	$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ -x + y + 2z = 0 \end{array}\right\}$
<u>Objectiu</u>: 0 sota diagonal principal <u>Com?</u> 2ª FILA = 2ª FILA + 1ª FILA $\left(\begin{array}{ccc\|c} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{matrix}} & 1 & 1 \\ & 3 & 1 \end{array}\right)$	$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ \quad 2y + 3z = 1 \end{array}\right\}$
Observem la caixa quadrada amb zeros sota la diagonal, i els elements de la diagonal tots $\neq 0$. Les columnes de fora seran paràmetres, que passen al terme independent restant.	

$$\left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 1 & z & 1 \\ 0 & 2 & 3z & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1-z \\ 0 & 2 & 1-3z \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{r} x+y = 1-z \\ 2y = 1-3z \end{array}\right\}$$

A partir d'aquí, podem seguir de 2 maneres:

1. Resolució endarrere,
2. Gauss complet.

1. Per fer <u>resolució endarrere</u>, comencem aïllant per la darrera equació i anem substituint en les anteriors:

$$2y = 1-3z \rightarrow \boxed{y = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}z}$$ y en funció del paràmetre z

$$x+y = 1-z$$

$$x + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}z\right) = 1-z$$

$$\boxed{x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z}$$ x en funció del paràmetre z.

El sistema està resolt.

② Per fer Gauss complet, partim de

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1-z \\ 0 & 2 & 1-3z \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} x + y = 1 - z \\ 2y = 1 - 3z \end{array}$$

I fem zeros per sobre de la diagonal.

<u>Com</u>? $1^a F = 1^a F - \frac{1}{2} 2^a F$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z \\ 0 & 2 & 1-3z \end{array}\right) \qquad \left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z \\ 2y = 1 - 3z \end{array}\right\}$$

Finalment, volem la matriu identitat a l'esquerra

<u>Com</u>? $2^a F = \frac{1}{2} \cdot 2^a F$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} - \frac{3}{2}z \end{array}\right) \qquad \left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z \\ y = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}z \end{array}\right\}$$

SISTEMA RESOLT!!!

EXPRESSIÓ VECTORIAL DE LA SOLUCIÓ.

(x, y, z) és solució del sistema anterior si

$$(x,y,z) = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}z,\ \frac{1}{2}-\frac{3}{2}z,\ z\right)$$

Ho podem reescriure com:

$$(x,y,z) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) + z\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 1\right) \quad \text{(EXPRESSIÓ VECTORIAL)}$$

Interpretació geomètrica:

- $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ PUNT DE PAS
- $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 1\right)$ VECTOR DIRECTOR
- z PARÀMETRE

(Més endavant explicarem aquesta interpretació)

1.4 ANÀLISI DE LES SOLUCIONS: TEOR. DE ROUCHÉ.

En general, afegir una equació a un sistema fa perdre solucions (sistema més restrictiu)

A. p. ex.

$$\left.\begin{array}{l} [1]\ x + y + z = 1 \\ [2]\ -x + y + 2z = 0 \end{array}\right\} \longrightarrow (x, y, z) = \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\lambda,\ \tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{2}\lambda,\ \lambda\right)$$

(infinites solucions depenent del paràmetre λ)

Si hi afegim:

$[3]\ x - y - z = 0$

substituint-hi les solucions de [1] i [2] obtingudes:

$$[3]: \quad \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\lambda - \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{2}\lambda\right) - \lambda = 0 \longrightarrow \lambda = 0$$

i per tant:

$$(x, y, z) = \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cdot 0,\ \tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{2}\cdot 0,\ 0\right) = \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 0\right)$$ (solució única)

B. No sempre és així, però.

L'equació $[4] = [1] + [2]$: $0x + 2y + 3z = 1$ no afegeix cap condició nova sobre x, y, z, i per tant

$$\left.\begin{array}{l} [1]\ x + y + z = 1 \\ [2]\ -x + y + 2z = 0 \\ [4]\ \quad 2y + 3z = 1 \end{array}\right\} \text{ i } \left.\begin{array}{l} [1]\ x + y + z = 1 \\ [2]\ -x + y + 3z = 0 \end{array}\right\}$$

tenen les mateixes solucions

C. En canvi, afegir-hi

$$[5]: \ 2y + 3z = 0 \quad \text{(sumem [1] i [2], canviem terme indept.)}$$

fa perdre <u>totes</u> les solucions, perquè la condició és claramant impossible

(no pot ser $2y + 3z = 1$ i $2y + 3z = 0$ al mateix temps)

En el cas A, el sistema $\begin{cases} [1] \\ [2] \\ [3] \end{cases}$ és <u>compatible determinat</u>.

En el cas B, " " $\begin{cases} [1] \\ [2] \\ [4] \end{cases}$ és <u>compat. indeterminat</u>

(com també ho és $\begin{cases} [1] \\ [2] \end{cases}$)

En el cas C, els sistema $\begin{cases} [1] \\ [2] \\ [5] \end{cases}$ és <u>incompatible</u>.

En <u>problemes d'estàtica</u>:

- COMPATIBLE DETERMINAT : ISOSTÀTIC
- " INDETERMINAT : HIPERESTÀTIC
- INCOMPATIBLE : HIPOSTÀTIC

El T^a de Rouché ens permet analitzar les solucions d'un sistema sense resoldre'l:

rang(A) = rang$(A \vdots m)$ sistema <u>compatible</u>

= nombre d'incògnites, <u>determinat</u> •

< " " , <u>indeterminat</u> •

(nombre paràmetres solució = nombre incògnites − rang(A))

rang(A) < rang$(A \vdots m)$ sistema <u>incompatible</u>.

[No expliquem el concepte de rang]

1.5 INVERSIÓ DE MATRIUS

La inversió de matrius es relaciona amb la resolució de sistemes de dues maneres diferents.

① Si coneixem la inversa de la matriu de coeficients d'un sistema, el sistema està resolt.

p. ex.

$$\left.\begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ 2x + y &= 4 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\text{Termes indept.}}$$

Sabent que $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & \frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & 1/5 \end{pmatrix}$

tenim que la solució del sistema és:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 \\ -2/5 & 1/5 \end{pmatrix}}_{M^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\text{Termes indept.}} = \begin{pmatrix} \frac{9}{5} \\ \frac{2}{4} \end{pmatrix} \quad \underline{\text{solució}}$$

Per què?

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \underbrace{M^{-1} \cdot M}_{Id} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

—— P.

(2) Calcular una matriu inversa és, de fet, resoldre un sistema d'equacions.

p. ex. Volem calcular M^{-1}, la matriu inversa de $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Desconeixem M^{-1}, i per tant l'escrivim com:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

Imposem la condició que siguin inverses M i M^{-1}:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que és un sistema de 4 eqs. amb 4 incògnites (a, b, c i d)

$$\left.\begin{aligned} a - 2b &= 1 \\ 2a + b &= 0 \\ c - 2d &= 0 \\ 2c + d &= 1 \end{aligned}\right\}$$

La solució del sistema ens proporciona M^{-1}.

Una observació més acurada del sistema anterior mostra que és, en realitat, dos sistemes de 2 eqcs. i 2 incògnites:

$$\left.\begin{aligned} a - 2b &= 1 \\ 2a + b &= 0 \end{aligned}\right\} \quad i \quad \left.\begin{aligned} c - 2d &= 0 \\ 2c + d &= 1 \end{aligned}\right\}$$

que tenen la mateixa matriu de coeficients:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$=$$

però diferents termes independents

Podem resoldre tots dos sistemes plegats, aplicant el mèt. de Gauss a la matriu de coeficients, i arrossegant les operacions a les dues columnes de termes independents:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{complet}]{\text{Gauss}} \cdots \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right)$$

termes indepts.

solució M^{-1}