Part I. Sistemes de Referència Afins

E3. Exercicis resolts

5.1 Dibuixeu al pla les trames de coordenades generades per la referència canònica $R=\{0;\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ i la referència $S=\{A;u_1,u_2\}$, on $A=(0,-1)_R$ $\vec{u}_1=(2,1)_R$ i $\vec{u}_2=(-1,1)_R$
Resoleu gràficament els canvis de coordenades i equacions que es proposen a continuació:

a. Coordenades en referència canònica dels punts $P_1=(1,1)_S$ $P_2=(1,-1)_S$ i $P_3=(2,1)_S$

b. Coordenades en referència S dels punts $P_4=(3,2)_R$ $P_5=(1,1)_R$ $P_6=(4,-2)_R$ i $P_7=(-3,-1)_R$

c. Coordenades en referència canònica dels vectors $\vec{v}_1=(0,-2)_S$ $\vec{v}_2=(1,2)_S$ i $\vec{v}_3=(1,0)_S$

d. Coordenades en referència S dels vectors $\vec{v}_4=(-2,-1)_R$ i $\vec{v}_5=(3,-3)_R$

e. Equacions implícites en referència R de la recta que en referència S té equacions $x'=y'$

f. Equacions implícites en referència S de la recta que en referència R té equacions $y=2$

5.2 Considereu les referències del pla $R=\{0;\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ (la referència canònica) i $S=\{A;u_1,u_2\}$ on $A=(1,1)_R$ $\vec{u}_1=(2,2)$ i $\vec{u}_2=(4,-2)_R$. Es demana:

a. Si $\vec{v}$ té coordenades (2,6) en referència canònica, quines coordenades té en referència S?

b. Coordenades en referència S d'un vector genèric $\vec{u}=(u_1,u_2)_R$

c. Si $\vec{w}$ té coordenades (0,1) en referència S, quines coordenades té en referència canònica?

d. Coordenades en referència canònica d'un vector genèric $\vec{u}=(u_1',u_2')_S$

e. Coordenades en referència S del punt $P=(0,3)_R$

f. Equacions del canvi de referència de R a S.

g. Coordenades en referència R del punt $P=(1,1)_S$

h. Equacions del canvi de referència de S a R.

5.3 Considereu les referències del pla $R=\{0;\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ i $S=\{A;u_1,u_2\}$ on $A=(1,2)_R$ $\vec{u}_1=(1,1)$ i $\vec{u}_2=(-1,1)_R$. Es demana:

a. Matriu del canvi de referència de R a S.

b. Coordenades d'un vector $\vec{u}=(u_1,u_2)_R$ en referència S.

c. Equacions del canvi de coordenades de R a S.

5.4 Proveu que els vectors (1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0) i (1,1,1,1) formen base de R^4. Amb aquesta base i l'origen de coordenades de la referència canònica, O, es forma una referència.

a Quines són les coordenades del vector (3,7,5,6) en aquesta referència?
b I les d'un vector genèric (x,y,z,t)?
c Hi ha diferències entre punts i vectors a l'hora de canviar de referència?

5.5 Considereu les següents bases de R^3: C={(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)} B={(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)} i D={(-1,1,1),(1,-1,1),(1,1,-1)}. Prenent com a origen comú de totes elles l'origen O de la referència canònica, s'obtenen tres referències que anomenarem igual C (la referència canònica), B i D. Doneu les matrius dels canvis de C a B, de B a C, de C a D, de D a C, de B a D i de D a B.

5.6 Prenem referència a l'espai $S=\{O;\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ on l'origen O coincideix amb el de la referència canònica , i els vectors de la base són $\vec{u}_1=(1,1,0)$ $\vec{u}_2=(1,0,-1)$ $\vec{u}_3=(1,1,1)$

a. Matriu del canvi de referència canònica a la nova referència S.
b. Coordenades del punt Q=(3,2,0) en referència S.
c. Coordenades d'un punt genèric P=(x,y,z) en referència S.
d. Introduïm ara un nou origen de coordenades A=(-2,0,0). Equacions del canvi de S a T i de canònica a T, on T és la referència $T=\{A;\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$

5.7 Considereu la referència S formada per $A=(0,0,1)$ $\vec{u}_1=(1,1,0)$ $\vec{u}_2=(-1,1,0)$ $\vec{u}_3=(0,0,1)$

a. Dibuixeu-la.
b. Matrius dels canvis de referència de S a C (la referència canònica) i de C a S.
c. Equacions dels canvis de referència de S a C i de C a S.
d. Equació implícita del pla que passa pel punt (1,0,0) i té vectors directors (1,0,-1) i (1,-1,0), en els dos sistemes de referència.

5.8 Considereu el pla z=1, on s'ha fixat referència $S=\{A;u_1,u_2\}$ amb $A=(1,1,1)$ $\vec{u}_1=(1,0,0)$ $\vec{u}_2=(0,1,0)$ Es demana:

a. Coordenades dels punts (1,1,1) i (2,0,1) en la referència S del pla.
b. Coordenades tridimensionals dels punts del pla $(1,1)_S$ i $(-1,-1)_S$
c. És possible assignar coordenades en S al punt (2,0,2)?
d. Coordenades en referència S d'un punt genèric del pla (x,y,1).
e. Coordenades tridimensionals d'un punt del pla (x',y')
f. El pla x+y+z=1 determina una recta r en tallar el pla z=1. Doneu les equacions implícites i paramètriques de r en la referència tridimensional i en la referència S del pla.
g. Feu el mateix amb la recta x'-y'=1 (x' i y' són les coordenades en la referència del pla).

5.9 Fixem referència S={(1,0,0); (1,-1,0), (1,1,-2)} sobre el pla d'equació x+y+z=1. Es demana:

a. Coordenades tridimensionals d'un punt $(x',y')_S$ del pla.
b. Coordenades en referència S d'un punt (x,y,z) del pla.
c. Equacions implícites i paramètriques en referència S de la recta r que determinen els plans x+y+z=1 i z=3.
d. Equacions implícites i paramètriques en la referència tridimensional dels eixos de la referència S.

5.10 A la guerra els bons assalten un observatori enemic i hi troben un croquis on hi figuren les coordenades del cim A (A=(3.5,2.1)), de la torre de l'església del poble B (B=(1.9,0.7)) i del campament dels dolents C (C=(1,-0.2)). No obstant això, només saben que l'origen de coordenades dels dolents és l'observatori i no coneixen els vectors utilitzats com a referència. Tot i així s'espavilen per determinar la posició del campament dels dolents i els claven una bona pallissa. Com s'ho fan?

5.11 C és la referència canònica de R^2. Si un observador (situat a l'origen de coordenades) atribueix al punt $(1,1)_C$ les coordenades $(2,-1)_B$ i al punt $(1,-1)_C$ les coordenades $(1,0)_B$, quina referència B està fent servir?

5.12 Se sap que l'equació de la recta y=1 segueix sent y'=1 quan prenem una nova referència $S=\{O=(0,0);\ \vec{u}_1=(a,b),\ \vec{u}_2=(c,d)\}$ al pla. Quins són els possibles valors de a,b,c i d ?

5.13 Se sap que el canvi de referència canònica a certa referència S={A; u_1 i u_2} té per equacions $(x',y')_S$ = (x-ay,y) (0<a<1). Doneu les coordenades de l'origen A i els vectors u_1 i u_2 . Dibuixeu-los juntament amb els eixos de S (0X' i 0Y'). Doneu les equacions del canvi de S a canònica.

E5. Exercicis proposats

5.14 Considerem l'espai tridimensional amb la referència $C=\{O\,;\vec{e}_1\,,\vec{e}_2\,,\vec{e}_3\}$ Introduïm una nova referència $S=\{A\,,\vec{u}_1\,,\vec{u}_2\,,\vec{u}_3\}$ amb $A=(2,2,2)$ $\vec{u}_1=(1,1,0)$ $\vec{u}_2=(1,-1,0)$ $\vec{u}_3=(1,1,1)$. Es demana:

a. Matriu del canvi de referència C a S.
b. Equacions del canvi de referència de C a S.
c. Coordenades en referència C dels punts $(1,1,1)_S$ i $(0,0,0)_S$
d. Equacions implícites de la recta (x,y,z) = (2,2,2) + λ (1,1,0) i del pla x+y-2z = 0 en la nova referència S.

5.15 Es considera la referència a l'espai $S=\{A=(-1,0,1);\ \vec{u}_1=(1,1,0),\ \vec{u}_2=(0,1,1),\ \vec{u}_3=(1,0,1)\}$

Es demana:

a. Equacions del canvi de referència canònica a S.

b. Coordenades d'un vector $(a,b,c)_S$ i d'un punt $(x',y',z')_S$ en referència canònica.

c. Equacions implícites en referències canònica i S de la recta r: $(x,y,z)=(0,0,2)+\lambda(1,0,1)$

5.16 Es considera el pla x+y=2, i dins d'aquest pla la referència $S=\{A,\ \vec{u}_1,\ \vec{u}_2\}$ on $A=(1,1,0)$ n'és l'origen i $\vec{u}_1=(-1,1,0)$ $\vec{u}_2=(0,0,1)$ en són els vectors de la base.

a. Comproveu que el punt P=(0,2,2) és del pla, i doneu-ne les coordenades en referència S.

b. Coordenades en referència canònica de l'espai d'un punt qualsevol del pla $Q=(x',y')_S$.

5.17 Se sap que els punts P=(3,4) i Q=(2,3) tenen coordenades $P=(1,1)_S$ i $Q=(0,1)_S$ en una referència $S=\{A,\ \vec{u}_1,\ \vec{u}_2\}$ de la qual es coneix l'origen A=(3,2) però no els vectors de la base $\vec{u}_1=(a,b)$, $\vec{u}_2=(c,d)$. Determina les coordenades a,b,c i d d'aquests vectors en referència canònica.

5.18 Es considera el pla x+y-z=1, i dins d'aquest pla la referència $S=\{A,\ \vec{u}_1,\ \vec{u}_2\}$ on A=(1,0,0) n'és l'origen i $\vec{u}_1=(1,0,1)$, $\vec{u}_2=(0,1,1)$ en són els vectors de la base.

a. Equacions dels canvi de referència tridimensional a S i viceversa.

b. Equacions implícites en referència tridimensional de la recta x'=y' (en ref. S).

5.19 Doneu una referència S en la que la recta d'equació y=x+2 passi a tenir equació y'=0. És única?

5.20 Considera els punts A=(-1,-1) B=(1,0) C=(0,1) i D=(2,2). Dóna una referència S en la qual $A=(0,0)_S$ $B=(1,0)_S$ $C=(0,1)_S$ i $D=(1,1)_S$

És possible una referència T en la qual $A=(0,0)_S$ $B=(1,0)_S$ $C=(0,1)_S$ i $D=(2,1)_S$? Raoneu la resposta.

5.21 En certa referència S del pla, els punts A=(0,-1), B=(2,1) i C=(3,0) passen a tenir coordenades $A=(0,0)_S$ $B=(0,1)_S$ i $C=(0.5,0.5)_S$. Quines són les coordenades en referència S del punt D=(4,-1)? Quins són l'origen i els vectors de la base de la referència S? Dóna les equacions de la recta x=1 en la nova referència.

5.22 En certa referència S del pla, els punts A=(-1,1), B=(1,1) i C=(0,3) passen a tenir coordenades $A=(0,0)_S$ $B=(0,1)_S$ i $C=(1,1)_S$. Quines són les coordenades en referència S del punt D=(-2,1)? Quins són l'origen i els vectors de la base de la referència S?

5.23 Es considera una referència al pla $R=\{O\,;\vec{e}_1\,,\vec{e}_2\}$ A partir d'aquesta, en construïm una de nova $S=\{A\,,\vec{u}_1\,,\vec{u}_2\}$, on els vectors s'han obtingut com $\vec{u}_1=\vec{e}_1+\vec{e}_2$ i $\vec{u}_1=\vec{e}_1-\vec{e}_2$ Equacions dels canvis de referència de R a S i viceversa.

5.24 $x^2+2xy+y^2-2x-6y+4=0$ és l'equació implícita d'una corba del pla. Per a dibuixar-la, seguiu els següents passos:
1.- Introduïu una nova referència S={(1,1); (1,1),(-1,1)} i doneu les equacions del canvi de S a canònica.
2.- Escribiu l'equació implícita de la corba en referència S (o sigui, en coordenades $(x',y')_S$). De quina corba es tracta? (per exemple, circumferència, paràbola, etc)
3.- Dibuixeu els eixos de la referència canònica, els de la referència S i, finalment, la corba.

5.25 Donats tres punts P,Q i R no alineats del pla:

a. Gràficament, doneu una referència $S=\{A\,,\vec{u}_1\,,\vec{u}_2\}$ en la que les seves noves coordenades siguin $P=(1,1)_S$ $Q=(-1,-1)_S$ i $R=(-1,1)_S$
b. Si P=(a,b), Q=(c,d) i R=(e,f) són les coordenades dels punts en referència canònica, quines són les de A, $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$

5.26 Considera els punts A=(-1,-1) B=(1,0) C=(0,1) i D=(2,2). Dóna una referència S en la qual $A=(0,0)_S$ $B=(1,0)_S$ $C=(0,1)_S$ i $D=(1,1)_S$
És possible una referència T en la qual $A=(0,0)_S$ $B=(1,0)_S$ $C=(0,1)_S$ i $D=(2,1)_S$? Raona la resposta.

5.27 Doneu una referència $S=\{A;\vec{u}_1,\vec{u}_2\}$ del pla sabent que les rectes r_1: x+4y=5, r_2: x=1 i r_3: x+y=5 tenen equacions en referència S
r_1: x'=y' , r_2: x'=-y' i r_3: y'=1

5.28 Es considera la referència $S=\{O=(0,0)_T;\vec{u}_1=(1,1)_T,\vec{u}_2=(-1,1)_T\}$ on T és una altra referència $T=\{O=(0,0);\vec{u}_1=(1,0),\vec{u}_2=(1,2)\}$ Doneu les matrius dels canvis de S a T, de T a canònica i de S a canònica.

5.29 Recordeu que la distància D d'un punt P=(x,y) a l'origen de coordenades O=(0,0) es calcula segons la fórmula $D = \sqrt{x^2 + y^2}$

a. Calculeu la distància de P=(1,1) a l'origen de coordenades.

b. Considereu la referència $S = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ on $\vec{u}_1 = (1,1)$ i $\vec{u}_2 = (-1,1)$ (mateix origen). Quines són les coordenades de $(x',y')_S$ de P en la nova referència?

c. Observeu que l'expressió $\sqrt{x'^2 + y'^2}$ no serveix per calcular la distància quan P està expressat en referència S.

d. Quina seria la fórmula correcta amb x' i y'? Comproveu-la sobre el punt P dels apartats anteriors.

5.30 Se sap que, en certa referència S, les rectes x'=0, y'=0 i y'=1 tenen per equacions en referència canònica y=x, y=0 i y=1 respectivament. Dóna l'origen i els vectors de S. És única?

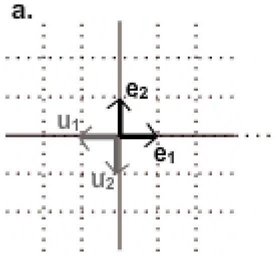
5.31 **a.** Doneu una referència S del pla en la que la recta x+y=1 sigui l'eix OX' i la recta x-y=0 sigui l'eix OY'.

b. Doneu na referència T de l'espai en la que el pla x+y+z=1 sigui el pla y'=0, i x-y+z=0 sigui el pla x'=0.

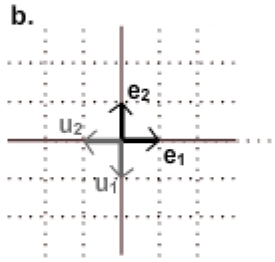
c. Són úniques les referències dels apartats anteriors? Argumenta la resposta i dóna exemples.

5.32 Doneu les equacions dels canvis de S a canònica i de canònica a S que mostren les figures següents:

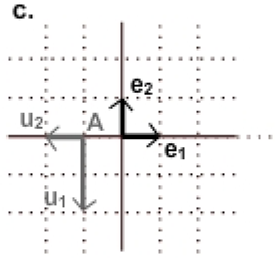
a.



b.



c.



5.33 **a.** Doneu una referència S del pla en la que la recta x+y=1 sigui l'eix OX' i la recta x-y=0 sigui l'eix OY'.

b. Doneu na referència T de l'espai en la que el pla x+y+z=1 sigui el pla y'=0, i x-y+z=0 sigui el pla x'=0.

c. Són úniques les referències dels apartats anteriors? Argumenta la resposta i dóna exemples.

5.34 Considereu les rectes del pla r_1: x+y=1 i r_2: x-y=0, i una referència S formada pel seu punt d'intersecció i els vectors directors respectius (NOTA: aquesta referència no és única)

a. Equacions dels canvis entre les referències canònica i S.
b. Equacions implícites i paramètriques en referència S de r_1 i r_2
c. Equacions implícites en referència canònica de les rectes x'+y'=0 i x'-y'=0

E5. Solucions

Solució 5.1 **a.** $P_1=(1,1)_R$ $P_2=(3,-1)_R$ i $P_3=(3,2)_R$

b. $P_4=(2,1)_S$ $P_5=(1,1)_S$ $P_6=(1,-2)_S$ i $P_7=(-1,1)_S$

c. $\vec{v}_1=(2,-2)_R$ $\vec{v}_2=(0,3)_R$ i $\vec{v}_3=(2,1)_R$

d. $\vec{v}_4=(-1,9)_S$ i $\vec{v}_5=(0,-3)_S$

e. 2x-y=1

f. x'+y'=3

∎

Solucions 5.2 **a.** Les coordenades $(v_1',v_2')_S$ de (2,6) en la nova referència S es calculen resolent el sistema d'equacions $(2,6)=v_1'(2,2)+v_2'(4,-2)$

També es poden calcular (és equivalent), multiplicant per la matriu inversa de M, on $M=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 2 & -2\end{pmatrix}$. La inversa és:

$$M^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{6} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6}\end{pmatrix}$$

i les coordenades $(v_1',v_2')_S$ valen:

$$\begin{pmatrix}v_1'\\ v_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{6} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{7}{3}\\ -\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

b.

$$\begin{pmatrix}u_1'\\ u_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{6} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}$$

c. Les coordenades $(w_1,w_2)_R$ en referència canònica de $(0,1)_B$ seran $(w_1,w_2)=0(2,2)+1(4,-2)=(4,-2)$. També es poden obtenir multiplicant el vector $(0,1)_B$ per la matriu M.

d.

$$\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u'_1\\ u'_2\end{pmatrix}$$

e. S'obtenen multiplicant per la matriu de canvi el vector que s'obté al restar al punt (0,3) el nou origen de coordenades (1,1) , o sigui:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0-1 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

f. De forma semblant, per a un punt genèric $P=(x,y)_R$ serà:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}$$

g.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

h. Per a un punt genèric, la relació serà:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

■

Solució 5.4 **a** Com que $(3,7,5,6)=-4(1,0,0,0)+2(1,1,0,0)-(1,1,1,0)+6(1,1,1,1)$ les coordenades són $(-4,2,-1,6)$

b $(x,y,z,t)=(y-x)(1,0,0,0)+(z-y)(1,1,0,0)+(t-z)(1,1,1,0)+t(1,1,1,1)$ i per tant, les coordenades són $(y-x,z-y,t-z,t)$

El mateix resultat es pot obtenir invertint la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

i multiplicant la inversa per les coordenades (x,y,z,t):

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

c No, perquè l'origen no varia.

■

Solució 5.5 De forma directa, podem afirmar que les matrius de canvi entre C i les altres dues són:

B→C
$$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

D→C
$$\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$$

C→B
$$\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

C→D
$$\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}$$

Les dues matrius restants (canvis entre B i D), s'obtenen multiplicant les anteriors en l'ordre adequat. Per exemple, per transformar les coordenades $(x', y', z', t')_B$ en $(x'', y'', z'', t'')_D$ del mateix punt, primer multiplicarem per (B→C) (punt en canònica) i a continuació per (C→D).

$$B\to D: \quad \begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&1\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1\\\frac{1}{2}&1&1\end{pmatrix}$$

$$D\to B: \quad \begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&2&0\\0&-2&2\\1&1&-1\end{pmatrix}$$

∎

<u>Solució 5.6</u> **a** La matriu és

$$M^{-1}=\begin{pmatrix}-1&2&-1\\1&-1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}$$

, la inversa de la matriu M que es forma disposant els vectors de la nova base en columnes,

$$M=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

b. $Q=(3,2,0)=(1,1,1)_S$, com a resultat de:

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2&-1\\1&-1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}$$

c. De forma semblant, per a un punt genèric $P=(x,y,z)$ el canvi és:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+2y-z \\ x-y \\ x-y+z \end{pmatrix}$$

on (x',y',z') representen les coordenades de P en referència S, o sigui: $P=(x',y',z')_S$

d. La nova referència T introdueix un canvi d'origen, i ja no n'hi haurà prou amb considerar només la matriu. Notarem amb '' (doble prima) les coordenades d'un punt genèric en T.

$$P=(x,y,z)_R=(x',y',z')_S=(x'',y'',z'')_T$$

<u>Canvi de S a T</u>: primer s'ha d'expressar A en referència S

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{d'on } A=(2,-2,-2)_S$$

i després $(x'',y'',z'')=(x',y',z')-(2,-2,-2)=(x'-2,y'+2,z'+2)$

<u>Canvi de R a T</u>: s'obté encadenant els canvis: de R a S, i de S a T.

$R \to S \quad (x' \;\; y' \;\; z')=(-x+2y-z \quad x-y \quad x-y+z)$

$S \to T \quad (x'',y'',z'')=(x',y',z')-(2,-2,-2)=(x'-2,y'+2,z'+2)=(-x+2y-z-2,x-y+2,x-y+z+2)$

∎

<u>Solució 5.7</u>

b. De S a C:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De C a S:

$$M^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c. De S a C:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d. De C a S:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

∎

Solució 5.8

Notarem per R la referència tridimensional.

a. $(1,1,1)_R$ és el nou origen de coordenades, i per tant $(1,1,1)_R=(0,0)_S$

$(2,0,1)_R$: per a tenir les noves coordenades, restem el nou origen i expressem el resultat com a combinació lineal dels vectors de la nova base:
$(2,0,1)-(1,1,1)=(1,-1,0)=\vec{u}_1-\vec{u}_2=(1,-1)_S$

b. $(1,1)_S=A+\vec{u}_1+\vec{u}_2=(1,1,1)_R+(1,0,0)_R+(0,1,0)_R=(2,2,1)_R$
$(-1,-1)_S=A-\vec{u}_1-\vec{u}_2=(1,1,1)_R-(1,0,0)_R-(0,1,0)_R=(0,0,1)_R$

c. No, perquè el punt $(2,0,2)_R$ no és del pla.

d. $(x,y,1)_R-(1,1,1)_R=(x-1,y-1,0)_R=(x-1)(1,0,0)_R+(y-1)(0,1,0)_R=(x-1)\vec{u}_1+(y-1)\vec{u}_2$ Per tant, les coordenades són $(x-1,y-1)_S$

e. $(x',y')_S=A+x'\vec{u}_1+y'\vec{u}_2=(1,1,1)_R+x'(1,0,0)_R+y'(0,1,0)_R=(1+x',1+y',1)_R$

f. Equacions implícites de r (tridimensionals): $\begin{cases} x+y+z=1 \\ z=1 \end{cases}$

Equacions paramètriques de r (tridimensionals): s'obtenen resolent el sistema anterior en funció d'un paràmetre, $(x,y,z)=(2,0,1)+\lambda(-1,1,0)$

Equacions implícites de r (bidimensionals, en la referència del pla):

substituint x, y i z per les seves expressions corresponents en x' i y', resulta $x'+y'=0$

Equacions paramètriques de r (bidimensionals, en la referència del pla):
per exemple, resolent l'equació anterior, $(x',y')=\lambda(-1,1)$

g. Equació implícita bidimensional: $x'-y'=1$
Equacions implícites tridimensionals:
substituint les variables x',y' per les seves expressions equivalents en x,y,z i afegint la condició z=1, resulta $\begin{cases} x-y=1 \\ z=1 \end{cases}$
Equacions paramètriques bidimensionals:
resolent $x'-y'=1$ en funció d'un paràmetre, $(x',y')=(1,0)+\lambda(1,1)$
Equacions paramètriques tridimensionals: $(x,y,z)=(1,0,1)+\lambda(1,1,0)$

∎

Solució 5.9 **a.** $P=(x',y')_S$ significa que $\overline{AP}=x'(1,-1,0)+y'(1,1,-2)$. $\overline{AP}$ denota el vector amb origen en A (l'origen de la referència S) i extrem en P, o sigui $\overline{AP}=P-A=(x,y,z)-(1,0,0)$ Per tant, $(x,y,z)=(1,0,0)+x'(1,-1,0)+y'(1,1,-2) = (1+x'+y',-x'+y',-2y')$.

b. Si P=(x,y,z) és del pla x+y+z=1, serà de la forma P=(x,y,1-x-y). Les coordenades $P=(x',y')_S$ són els coeficients de la combinació lineal:
(x,y,1-x-y)-(1,0,0)=x'(1,-1,0)+y'(1,1,-2) o equivalentment,
(x-1,y,1-x-y)=(x'+y',-x'+y',-2y') que escrit matricialment resulta:

$$\begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ 1-x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \text{Canvi de S a R}$$

Per resoldre aquest sistema seleccionem un menor d'ordre 2 amb determinant no nul, i l'invertim. Per exemple,

$$\begin{pmatrix} y \\ 1-x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 1-x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} \\ y' = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} \end{cases}$$

c. <u>equacions implícites</u>: substituint x, y i z per les seves expressions en x',y' i z' (apartat a), s'obté que:

$$\left.\begin{matrix} x+y+z=1 \\ z=3 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} (1+x'+y')+(-x'+y')+(-2y')=1 \\ -2y'=3 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} 1=1 \\ -2y'=3 \end{matrix}\right\} \rightarrow y'=-\frac{3}{2}$$

A partir de les implícites obtenim fàcilment les <u>paramètriques</u>: $(x',y')=(0,-\frac{3}{2})+\lambda(1,0)$
(x' pot prendre qualsevol valor, y' està determinat).

■

<u>Solució 5.10</u> Prenent nova referència $S=\{O\,;\overrightarrow{OA}\,,\overrightarrow{OB}\}$, i expressant el punt desconegut C en la nova referència:
$C=(x,y)_S$ on x i y es calculen resolent el sistema $(1,-0.2)=x(3.5,2.1)+y(1.9,0.7)$, o el que és equivalent, multiplicant per la matriu inversa:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.5 & 1.9 \\ 2.1 & 0.7 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 \\ 1.82 \end{pmatrix}$$

El campament C té, per tant, coordenades (-0.7,1.82) en la nova referència, i això permet de localitzar-lo.

■

<u>Solució 5.11</u> L'origen és el mateix. En quant a la base, es pot resoldre per exemple imposant condicions sobre la matriu M de canvi de B a C.

Si $M=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ imposem $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Resolent, resulta $a=1$ $b=-1$ $c=1$ $d=-3$. Com que la matriu M del canvi de S a C es forma per columnes amb els vectors de la referència S, es té que $\vec{u}_1=(a,b)=(1,-1)$ i $\vec{u}_2=(c,d)=(1,-3)$, on $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$ són els vectors de B.

∎

Solució 5.12 Que l'equació segueix sent y'=1 ens diu dues coses. Primera, que el vector $\vec{u}_1$ de la nova referència es paral.lel a $\vec{e}_1$ (primer vector de la canònica). I la segona, que la recta passa pel punt $(0,1)_S$ Aquestes condicions només són possibles si $\vec{u}_1=(a,0)$ i $\vec{u}_2=(b,1)$.

∎

Solució 5.13 Com que $(0,0)=(0,0)_S$ l'origen A no varia, A=O.
En quant als vectors, escrivim les equacions matricialment,

$$\begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

i per tant $\vec{u}_1=(1,0)$ i $\vec{u}_2=(-a,1)$

∎