[títol_] **Exercicis de matemàtiques I . Lliçó 0.**
[versió_] Setembre 2010
[matèria_] Operacions amb matrius i determinants.
[assignatura_] Matemàtiques I
[centre_] E. T. S. d'Arquitectura del Vallès - Universitat Politècnica de Catalunya
[url_] http://upcommons.upc.edu
[fitxers_] QT2010_L0_E.pdf

[descripció_] Problemes i solucions de: operacions amb matrius, càlcul de rangs, càlcul de determinants i inversió de matrius.

E0. Exercicis comentats.

0.1.a Enunciat. Calculeu la següent suma de matrius:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Solució. El resultat és $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

Com s'ha obtingut? Sumant component a component.

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{0} & -1 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boxed{-1} & \boxed{1} & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{0} & \boxed{1} & -1 \\ 4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$1+(-1)=0$, $0+1=1$, etc. $\blacksquare$

0.1.b Enunciat. Calculeu el següent producte de matrius:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solució. El resultat és $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Com s'ha obtingut? La fila 1 de la primera matriu multiplicada (producte escalar) per la columna 1 de la segona dóna l'element que ocupa la posició fila 1, columna 1, de la matriu resultat. Semblant per fila 2 columna 1.

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{-1} \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{1} \\ \boxed{-1} \\ \boxed{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{1} \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \boxed{2} & \boxed{-3} & \boxed{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{1} \\ \boxed{-1} \\ \boxed{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \boxed{5} \end{pmatrix}$$

Els productes escalars es calculen fent: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1\cdot 1+0\cdot(-1)+(-1)\cdot 0 = 1$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\cdot 1+(-3)\cdot(-1)+5\cdot 0 = 5 \qquad \blacksquare$$

0.2.a **Enunciat.** Calculeu el determinant:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}$$

Solució. El determinant val $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -7$

Com s'ha obtingut? Efectuant els productes en creu i la resta dels seus resultats en l'ordre indicat:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = \boxed{2\cdot(-1)}\ \boxed{-\ 5\cdot 1} = -7 \qquad \blacksquare$$

0.2.b **Enunciat.** Calculeu el determinant:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Solució. El determinant val $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -15$

Com s'ha obtingut? Es pot obtenir efectuant els productes en creu i la suma o resta dels seus resultats, segons correspongui (Regla de Sarrus):

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \underbrace{\boxed{(-1)\cdot 0\cdot 2 + 2\cdot 3\cdot(-1) + 1\cdot 4\cdot 1}}_{+}\ \overbrace{\boxed{-\ 1\cdot 0\cdot(-1) - 2\cdot 4\cdot 2 - (-1)\cdot 3\cdot 1}}^{-} = -15$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Alternativament també es pot calcular fent el desenvolupament per una fila o columna (Desenvolupament de Laplace), basat en els determinants de les submatrius d'ordre 2 (o adjunts). Si triem, per exemple, la segona columna:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \boxed{-}2\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \boxed{+}\,0\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \boxed{-}\,1\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{matrix} + & \boxed{-} & + \\ - & \boxed{+} & - \\ + & \boxed{-} & + \end{matrix} \qquad = -2\cdot\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -2\cdot 11 + 0\cdot(-1) - 1\cdot(-7) = -15$$

Aquest mètode es pot fer servir també per a matrius de dimensions més grans. ∎

0.3. Enunciat. Calculeu el rang de la matriu

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 5 & 1 \\ -1 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Solució. El rang val $\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 5 & 1 \\ -1 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix} = 2$

Com s'ha obtingut?

Pas 1: Comencem amb un menor d'ordre 1 diferent de zero:

$$\begin{pmatrix} [2] & -3 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 5 & 1 \\ -1 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad \det[2] = 2 \neq 0 \longrightarrow \operatorname{rang} \geq 1$$

Pas 2: Ampliem el menor anterior - conservant-lo! - fins a 2x2, amb determinant no nul:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 5 & 1 \\ -1 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad \det\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = 9 \neq 0 \longrightarrow \operatorname{rang} \geq 2$$

Pas 3: Ampliem el menor anterior - conservant-lo! - fins a 3x3, amb determinant no nul:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 5 & 1 \\ -1 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad \det\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ -1 & 6 & 3 \end{bmatrix} = 0 \longrightarrow \text{no informa}$$

Hem de provar amb una altra possible ampliació:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 5 & 1 \\ -1 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad \det\begin{bmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 6 & 5 \end{bmatrix} = 0 \longrightarrow \text{no informa}$$

Com que no hi ha més ampliacions possibles, resulta que:

$$\text{rang}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 5 & 1 \\ -1 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}=2$$

Nota: no cal provar altres menors 3x3, perquè no seran ampliacions de l'últim menor 2x2 amb determinant diferent de zero. Per exemple, no cal provar:

$$\left(\begin{array}{c|ccc|} 2 & -3 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 5 & 1 \\ -1 & 6 & 3 & 5 \end{array}\right)$$

perquè no és ampliació de $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, menor 2x2 sobre el que s'ha construït tot el procés.

Alternativament un rang es pot calcular fent servir l'Algorisme de Gauss-Jordan que s'explica més endavant (Lliçó 1, Sistemes d'Equacions). El rang coincideix amb el nombre de files o columnes que no s'anul.len durant el procés de reducció de Gauss-Jordan. ∎

0.4.a Enunciat. Calculeu la inversa de la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solució. La inversa és la matriu $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Primer de tot observeu que el producte de la matriu per la seva inversa dóna la matriu identitat:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Això constitueix una comprovació de què la inversa he estat ben calculada.

Pel que fa als procediments, n'hi ha dos de ben diferenciats: el mètode de Cramer i el mètode de Gauss-Jordan.

CRAMER. Es tracta de:

1. Formar la matriu d'adjunts.

$$\text{Adj}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Transposar-la, o canviar files per columnes, tot i que en aquest cas queda igual.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{T} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Dividir-la pel determinant $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$, d'on resulta finalment que

$$\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$ és la matriu inversa.

GAUSS-JORDAN. En aquest cas es tracta d'aplicar l'algorisme de Gauss-Jordan complet a la matriu $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$ que està formada per la matriu que es vol invertir (banda esquerra) i la matriu identitat (banda dreta). Finalitzat el procés, a la banda esquerra hi tenim la identitat, i a la banda dreta la inversa que es volia calcular.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \quad .... \quad \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

(Nota: l'algorisme de Gauss-Jordan s'explica a la Lliçó 1, Sistemes d'Equacions.) ■

<u>0.4.b Enunciat.</u> Calculeu la inversa de la matriu

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -3 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

<u>Solució.</u> La inversa és la matriu $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -3 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

<u>Com s'ha obtingut?</u>

Primer de tot observeu que el producte de la matriu per la seva inversa dóna la matriu identitat:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -3 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Això constitueix una comprovació de què la inversa ha estat ben calculada.

Els dos procediments són:

CRAMER. 1. Formar la matriu d'adjunts.

$$\operatorname{Adj}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -3 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -3 \\ -2 & -1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -3 \\ -2 & -1 & -2 \end{vmatrix} & + \ldots \\ -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -3 \\ -2 & -1 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -3 \\ -2 & -1 & -2 \end{vmatrix} & - \ldots \\ + \ldots & - \ldots & + \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

2. Transposar-la, o canviar files per columnes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & -4 \end{pmatrix}^{T} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 6 & 2 & 6 \\ -4 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

3. Dividir-la pel determinant $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -3 \\ -2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -4$, d'on resulta finalment que

$$-\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 6 & 2 & 6 \\ -4 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{6}{4} & -\frac{2}{4} & -\frac{6}{4} \\ \frac{4}{4} & 0 & \frac{4}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ és la matriu inversa.

GAUSS-JORDAN. Aplicar l'algorisme de Gauss-Jordan complet a la matriu

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

que està formada per la matriu que es vol invertir (banda esquerra) i la matriu identitat (banda dreta). Finalitzat el procés, a la banda esquerra hi tenim la identitat, i a la banda dreta la inversa que es volia calcular.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \ldots. \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

(Nota: l'algorisme de Gauss-Jordan s'explica a la Lliçó 1, Sistemes d'Equacions.) ■

E0. Exercicis resolts.

0.5 Calculeu els productes de matrius:

a. $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

Solucions. Pareu atenció al fet que les matrius resultat d'un producte tenen tantes files com la primera i tantes columnes com la segona.

a. 33

b. $\begin{pmatrix} 14 & -21 & 35 \\ 4 & -6 & 10 \\ 10 & -15 & 25 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 6 \end{pmatrix}$

■

0.6 Calculeu AC, CA, (A+B)C, C(3A+2B) on A, B i C són les matrius:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Solucions.

$$AC=\begin{pmatrix} 5 & 7 & 2 \\ 29 & 28 & 6 \\ 9 & 13 & 3 \end{pmatrix} \qquad CA=\begin{pmatrix} 14 & 2 & -14 & 13 \\ 8 & 1 & -5 & 9 \\ 4 & 1 & -6 & 3 \\ 26 & -6 & -4 & 27 \end{pmatrix}$$

$$(A+B)C=\begin{pmatrix} 10 & 6 & 4 \\ 40 & 38 & 6 \\ 16 & 23 & 14 \end{pmatrix} \qquad C(3A+2B)=\begin{pmatrix} 54 & 20 & -22 & 49 \\ 30 & 17 & -9 & 35 \\ 16 & 7 & -10 & 11 \\ 94 & -52 & 20 & 99 \end{pmatrix}$$

■

0.7 Calculeu els determinants següents:

a. $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$ **b.** $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$ **e.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

c. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ **d.** $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

f. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 4 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$ **g.** $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

<u>**Solucions.**</u> Els determinants valen **a.** 0 **b.** -2 **c.** -15 **d.** 4 **e.** 22 **f.** 12 **g.** 82 $\blacksquare$

0.8 Calculeu el rang de les matrius següents:

a. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

e. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & -6 & 1 \\ -3 & -8 & 8 & 7 \\ 7 & -13 & 15 & 10 \end{pmatrix}$ **f.** $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 7 & -1 \\ 5 & 5 & -5 & 5 \end{pmatrix}$ **g.** $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

<u>**Solucions.**</u> Els rangs valen **a.** 2 **b.** 1 **c.** 1 **d.** 3 **e.** 3 **f.** 2 **g.** 1 $\blacksquare$

0.9 Calculeu, si és possible, les inverses de les matrius:

a. $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ **e.** $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ **f.** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 7 & 9 \end{pmatrix}$

Solucions. La inversa de la matriu de l'apartat **b** no existeix, perquè el seu determinant val 0. La inversa de la matriu de l'apartat **e** no existeix, perquè no és una matriu quadrada.
La resta valen:

a.

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{15} & \frac{4}{15} \\ \frac{4}{15} & -\frac{1}{15} \end{pmatrix}$$

c.

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

d.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -3 & -5 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

f.

$$\begin{pmatrix} 15 & 8 & -11 \\ -3 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

■