E1. Exercicis

1.1 Resoleu els següents sistemes d'equacions lineals.

a.
$$\left.\begin{array}{r} x+y=1 \\ x-y=0 \end{array}\right\}$$

b.
$$\left.\begin{array}{r} 3x+y=0 \\ 2x+7y=0 \end{array}\right\}$$

c.
$$\left.\begin{array}{r} 2x+y=-1 \\ x+2y=1 \end{array}\right\}$$

d.
$$\left.\begin{array}{r} -x+y+z=2 \\ x-y+z=-1 \\ x+y-z=0 \end{array}\right\}$$

e.
$$\left.\begin{array}{r} x+y-z=0 \\ 3x+4y-z=1 \\ 2x+5z+5z=4 \end{array}\right\}$$

f.
$$\left.\begin{array}{r} \frac{x}{2}+3y=6 \\ x-y-z=1 \\ -\frac{x}{2}-4y-z=-3 \end{array}\right\}$$

1.2 Resoleu, si és possible, els següents sistemes d'equacions lineals. Escriviu les solucions en forma vectorial.

a.
$$2x+y=1$$

b.
$$x-2y+z=2$$

c.
$$\left.\begin{array}{r} 3x+3y-3z=0 \\ x-y+3z=2 \\ x+2y-3z=-1 \end{array}\right\}$$

d.
$$\left.\begin{array}{r} -x+y+z=1 \\ x+y-z=0 \end{array}\right\}$$

e.
$$\left.\begin{array}{r} x+y-2z+t+3u=1 \\ 2x-y+2z+2t+6u=2 \\ 3x+2y-4z-3t-9u=3 \end{array}\right\}$$

f.
$$\left.\begin{array}{r} x+y+v=2 \\ y+z-v=1 \\ z+t+v=0 \\ t+u-v=0 \end{array}\right\}$$

1.3 Calculeu les inverses de les matrius següents plantejant un sistema d'equacions i resolent-lo pel mètode de Gauss.

a.
$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b.
$$\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

c.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

d.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

1.4 Calculeu les inverses de les matrius següents. Existeixen per a qualsevol valor del paràmetre a?

a.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

c.

$$\begin{pmatrix} 1 & a & -a \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2a & 1-2a \end{pmatrix}$$

d.

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$

1.5 Per tal de resoldre els sistemes següents, invertiu la matriu de coeficients i multipliqueu-la pel vector de termes independents. És sempre possible?

a.

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+z=0 \\ 2x+2y+3z=1 \\ -x+2y-5z=0 \end{array}\right\}$$

b.

$$\left.\begin{array}{r} x+y-z=0 \\ 3x+2y-z=1 \\ x+z=0 \end{array}\right\}$$

c.

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+z=0 \\ 2x+2y+3z=1 \\ -x+2y-5z=0 \end{array}\right\}$$

d.

$$\left.\begin{array}{c} x-3y+2z-t=0 \\ x-2y+4z-3t=-2 \\ z-t=-1 \\ x-3y+z=1 \end{array}\right\}$$

1.6 Resoleu els sistemes següents en funció dels paràmetres que hi apareixen.

a.

$$\left.\begin{array}{r} x+ay+z=b \\ 2x+ay+2z=b+1 \end{array}\right\}$$

b.

$$\left.\begin{array}{r} ax+y+z=0 \\ x+ay+z=0 \\ x+y+bz=0 \end{array}\right\}$$

c.

$$\left.\begin{array}{r} x-ay+z-t=0 \\ x+(1-a)y+z-t=b \end{array}\right\}$$

d.

$$\left.\begin{array}{r} x-y+(1+a)z=a \\ y+2z=a \\ 2x-2y+(2-a)z=-a \end{array}\right\}$$

1.7 Considereu un sistema lineal de tres equacions i tres incògnites, AX=B, amb la matriu A desconeguda, i el vector de termes independents B variable. Si se sap que

per a $B=(1,0,1)^T$ la solució és $X=(1,-2,2)^T$, i que

per a $B=(0,1,0)^T$ la solució és $X=(2,1,1)^T$.

a. Quant val la solució per a $B=(1,1 1)^T$?

b. I per $B=(1,1 1)^T$?

c. Es pot calcular la solució per a $B=(5,5,10)^T$?

1.8 En la mateixa situació del problema anterior:

a. Quan val la matriu A si sabem les solucions X_1 , X_2 i X_3 corresponents als termes independents $B_1=(1,0,0)^T$, $B_2=(0,1,0)^T$ i $B_3=(0,0,1)^T$ respectivament.

b. Quan val la matriu A si sabem que
per a $B_1=(1,0,0)^T$ la solució és $X_1=(1,2,1)^T$, que
per a $B=(1,1,0)^T$ la solució és $X=(-1,1,0)^T$, i que
per a $B=(1,1,1)^T$ la solució és $X=(1,3,3)^T$?

1.9 Si un sistema AX=B té solució per a qualsevol vector de termes independents B, llavors la matriu A ha de ser invertible. Raoneu per què, i doneu-ne un exemple.

1.10 Com són els termes independents B pels quals el sistema MX=B té solució, si

a.

$$M=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

b.

$$M=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

S1. Solucions

1.1 Tots aquests sistemes són compatibles determinats. Les seves solucions:

a. $(x,y)=(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2})$

b. $(x,y)=(0,\ 0)$

c. $(x,y)=(-\frac{1}{3},\ \frac{1}{3})$

d. $(x,y,z)=(-\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{2})$

e. $(x,y,z)=(2,-1,\ 1)$

f. $(x,y,z)=(-2,\ \frac{7}{3},\ \frac{16}{3})$

1.2 Tots els sistemes són compatibles indeterminats. Les solucions depenen de paràmetres, i solucions d'aspecte molt diferent poden ser correctes. Per comprovar una solució diferent de la que es proposa aquí, s'han de mirar dues coses:

1. el nombre de paràmetres ha de ser el mateix, i
2. al substituir-la al sistema ha de donar 0=0.

Totes les solucions es donen en forma vectorial.

a. $(x,y)=(0,1)+\lambda(1,-2)$

b. $(x,y,z)=(2,0,0)+\lambda(2,1,0)+\mu(-1,0,1)$

c. $(x,y,z)=(1,-1,0)+\lambda(-1,2,1)$

d. $(x,y,z)=(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)+\lambda(1,0,1)$

e. $(x,y,z,t,u)=(1,0,0,0,0)+\lambda(0,2,1,0,0)+\mu(0,0,0,-3,1)$

f. $(x,y,z,t,u,v)=(1,1,0,0,0,0)+\lambda(1,-1,1,-1,1,0)+\mu(-4,3,-2,1,0,1)$

1.3 **a.** Volem calcular una matriu amb coeficients desconeguts a,b,c,d tal que:

$$\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Això ens porta a resoldre dos sistemes d'equacions:

$$\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c}-1 & 3 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{array}\right) \xrightarrow{\text{mèt.Gauss}} \cdots \quad \begin{array}{c}a=0\\ b=1/3\end{array}$$

$$\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c\\ d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c}-1 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{\text{mèt.Gauss}} \cdots \quad \begin{array}{c}c=1\\ d=1/3\end{array}$$

La matriu inversa és $\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$

Observem que les matrius de coeficients de tots dos sistemes coincideixen, i per tant els algorismes de Gauss consten exactament dels mateixos passos idèntics. Podem agrupar les matrius afegint-hi les dues columnes de termes independents:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{mèt.Gauss}} \cdots \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \qquad \begin{array}{ll} a=0 & c=1 \\ b=\frac{1}{3} & d=\frac{1}{3} \end{array}$$

b. De forma semblant, obtindríem que:

$$\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

c.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 6 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1.4 **a.** Escrivim el sistema en forma de producte de matrius:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Multipliquem a banda i banda de la igualtat per la inversa de la matriu de coeficients:

$$\begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 1.75 & -1 & -0.25 \\ 1.5 & -1 & -0.5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 1.75 & -1 & -0.25 \\ 1.5 & -1 & -0.5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Com que

$$\begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 1.75 & -1 & -0.25 \\ 1.5 & -1 & -0.5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

resulta

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 1.75 & -1 & -0.25 \\ 1.5 & -1 & -0.5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

i la solució és $x=3,\ y=-1,\ z=-1$.

b. No sempre és possible. Per exemple, en aquest cas, la matriu de coeficients

$$\left.\begin{array}{r} x+y-z=0 \\ 3x+2y-z=1 \\ x+z=0 \end{array}\right\} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ no és invertible perquè $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}=0$.

En aquest cas, si hi ha solució, serà depenent de paràmetres.

1.5 a. Depenent dels valors dels paràmetres a i b es té:

$a=0\quad b\neq1$ sistema incompatible (no té solucions).

$a=0\quad b=1$ sistema indeterminat. La solució és: $(x,y,z)=(0,0,1)+\lambda(1,0,-1)+\mu(0,1,0)$ (depèn de 2 paràmetres).

$a\neq0$ sistema indeterminat. La solució és: $(x,y,z)=(0,\frac{b-1}{a},1)+\lambda(1,0,-1)$ (depèn de 1 paràmetre).

b. Observem que el sistema és homogeni, i per tant sempre té solució (com a mínim, (0,0,0) n'és una). La solució variarà depenent dels valors dels paràmetres a i b. Els casos són:

$a=1\quad b=1$ sistema indeterminat. La solució és: $(x,y,z)=\lambda(1,0,-1)+\mu(0,1,-1)$ (depèn de 2 paràmetres).

$a=1\quad b\neq1$ sistema indeterminat. La solució és: $(x,y,z)=\lambda(1,-1,0)$ (depèn de 1 paràmetre).

$a\neq1\quad 2=b(1+a)$ sistema indeterminat. La solució és: $(x,y,z)=\lambda\left(\frac{1-ab}{a-1},\ \frac{b-1}{a-1},\ 1\right)$ (depèn de 1 paràmetre).

$a\neq1\quad 2\neq b(1+a)$ sistema determinat. Una sola solució que és $(x,y,z)=(0,0,0)$

c. En aquest cas, sempre és indeterminat. La solució, que depèn de dos paràmetres, és:

$$(x,y,z,t)=(ab,b,0,0)+\lambda(-1,0,1,0)+\mu(1,0,0,1)$$

d Depenent del valor d'a, tindrem:

$a=0$ sistema indeterminat. La solució és: $(x,y,z)=\lambda(-3,-2,1)$ (depèn de 1 paràmetre)

$a\neq0$ sistema determinat. La solució és: $(x,y,z)=(a-3,a-2,1)$