~~QT2014~~
QT2015

$\boxed{2.1}$

# Lliçó 2 : PUNTS, VECTORS, VARIETATS.

## 2.1 Punts i vectors.

- punts, vectors, vectors lliures
- coordenades en eixos cartesians
- operacions gràfiques
- " amb coordenades
- combinació lineal.

## 2.2 Interpretació física : sistemes de forces.

- resultant i equilibri
- polígon de forces
- equilibrant
- descomposició respecte d'eixos

## 2.3 Interpretació geomètrica : subspai generat.

- subspai generat
- sistema de generadors
- vectors linealment dependents i independents
- base i dimensió d'un subspai.

## 2.4 Representació de varietats.

- Representació paramètrica de plans i rectes
- " implícita " " "
- Paral·lelisme
- Varietats de dimensió més gran.

## 2.5 Aspectes mètrics.

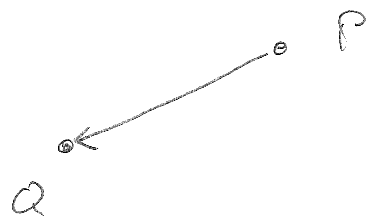
- distància, norma o mòdul, producte escalar. i angle.
- representació ~~de~~ vectors per angle-mòdul
- interpretació geomètrica dels determinants.
- " física del producte vectorial: moments.

## 2,1 PUNTS I VECTORS.

El pla, l'espai... Estan formats per punts

Els punts representen posicions.

Un parell ordenat de punts és un vector

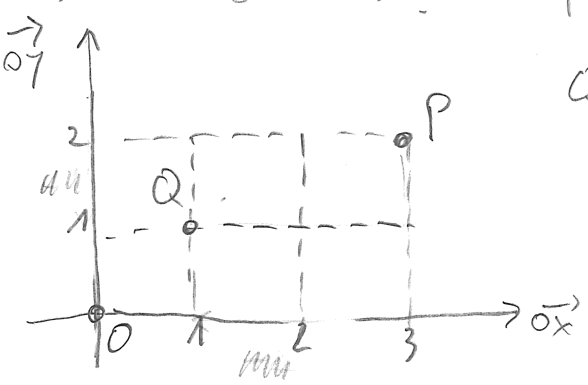


Els vectors representen direccions, però també sentits i longituds.

En física (estàtica), els vectors representen forces i moments.

Per referir-nos als punts fem servir coordenades.

Les més senzilles:

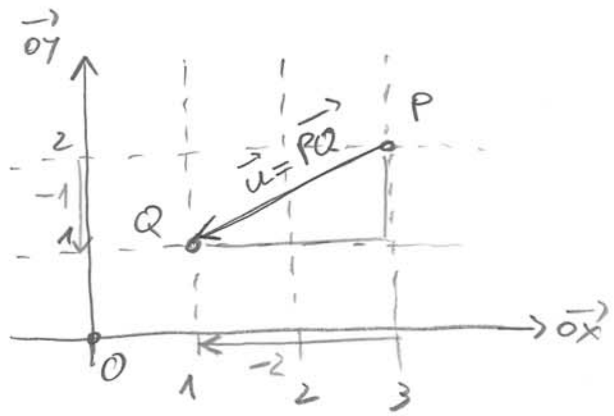


$P = (3,2)$

$Q = (1,1)$

"Projectem sobre un eix en la direcció de l'altre"
Més endavant, a la lliçó 3, estudiarem altres coordenades

Com ho fem per donar coordenades als <u>vectors</u>?




Considerant només les <u>projeccions</u> del vector, amb signe.

Així,

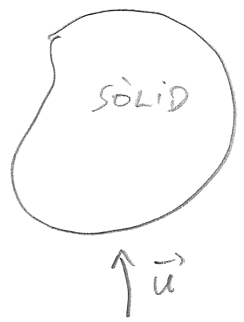
$\vec{u} = \vec{PQ} = Q - P = (1,1) - (3,2) =$
$= (-2,-1)$

<u>Observacions</u>: (1) Les coordenades $\vec{u} = (-2,-1)$ ens informen de la direcció, el mòdul (o longitud) i el sentit del vector. Però <u>no ens diuen res d'on es troba</u>.

Per això parlem de <u>vectors lliures</u>. Si volem <u>vectors ancorats</u>, o amb l'origen (o cua) situat en un punt concret, haurem de donar les coordenades del vector $\vec{u} = (-2,-1)$, però també les del punt de la cua, p.ex. $P = (3,2)$ (dibuix)

Si no s'especifica un origen (o cua) per a un vector, el representarem amb origen a l'origen de coordenades $O = (0,0,\ldots)$

p. ex. En física (estàtica) un vector $\vec{u}$ es considera lliure en el recompte general de forces que actuen sobre un sòlid




però ancorat en l'anàlisi de moments: (veure punt 2.5)

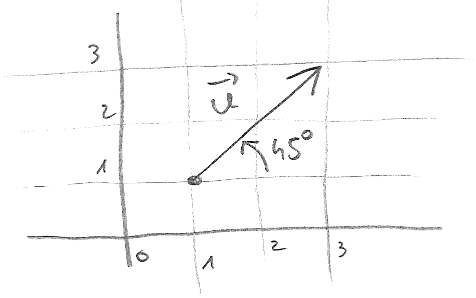

o a: punt d'aplicació de la força $\vec{u}$.

(2) Podem identificar un punt P amb el vector $\vec{OP}$, atès que

$$\underbrace{\vec{OP}}_{\text{coordenades}} = P - O = (p_1, p_2) - (0,0) = (p_1, p_2) = P.$$

(3) Introduïm el mòdul ó (longitud) d'un vector, que estudiarem a l'apartat 2.5: $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \ldots}$ si $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots)$. El <u>mòdul</u> $|\cdot|$ mesura la longitud del vector; i també s'anomena <u>norma</u>, i es nota $\|\cdot\|$.

p. ex. $\vec{u} = (2,2)$ , $\|\vec{u}\| = |\vec{u}| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$




En estàtica és habitual donar els vectors força amb un mòdul i un angle.

Així, $\vec{u} = (2,2) = 2\sqrt{2}_{45^\circ}$

(Més endavant, ho estudiarem amb detall, llic 3, coord. polars)

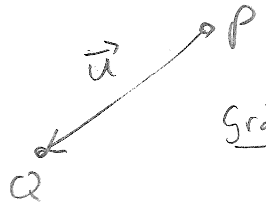
OPERACIONS. COMBINACIÓ LINEAL.

Operacions amb punts i vectors:

Hem vist que $\vec{u} = Q - P$ ("diferència de punts = vector")

Per tant, $\boxed{Q = P + \vec{u}}$ SUMA DE PUNT I VECTOR

Resultat: PUNT




Gràfic: "cua + vector = fletxa"

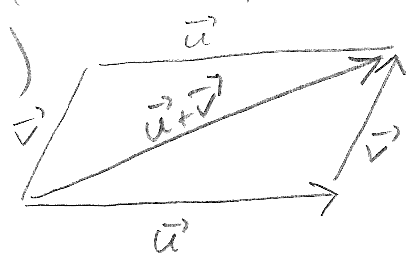
Analític: Si $P=(3,2)$, $\vec{u}=(-2,-1)$

$Q = P + \vec{u} = (3,2)+(-2,-1) =$

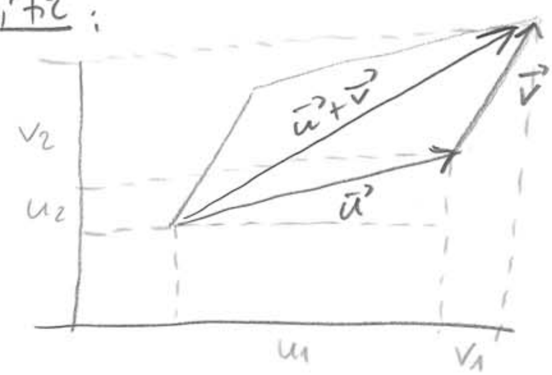
$= (1,1)$

SUMA DE VECTORS

Gràfic: Posem $\vec{v}$ a continuació d'$\vec{u}$ (o també: fem la diagonal del paral·lelogram)



<u>Analític</u>:




Les projeccions del vector $\vec{u}+\vec{v}$ satisfan:

$[\vec{u}+\vec{v}]_1 = u_1 + v_1$

$[\vec{u}+\vec{v}]_2 = u_2 + v_2$

Per tant, podem calcular el vector suma fent

$$\boxed{\vec{u}+\vec{v} = (u_1+v_1,\ u_2+v_2)}$$

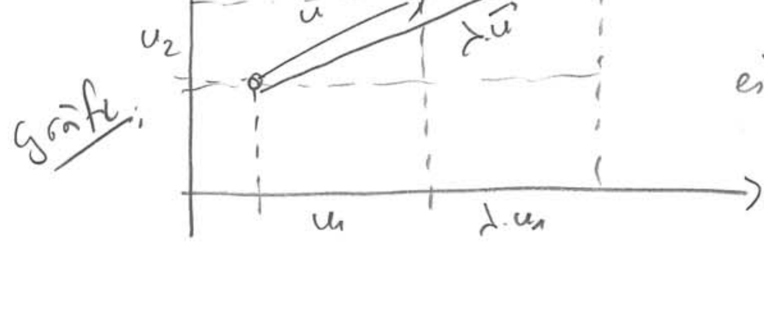
Naturalment, podem estendre la suma a 3 o més vectors.

( <u>NOTA:</u> identificant $P$ amb $\vec{OP}$, i $Q$ amb $\vec{OQ}$,
l'operació $Q = P + \vec{u}$ (suma de punt i vector)
es redueix a una suma de vectors $\vec{OQ} = \vec{OP} + \vec{u}$ )

**PRODUCTE DE VECTOR PER CONSTANT (ESCALAR)**

El resultat és un vector paral·lel a l'original, escalat en la raó de la constant:

<u>Gràfic</u>:




$\lambda \cdot \vec{u} = (\lambda u_1, \lambda u_2)$ : <u>Analític</u>

$\lambda$: escalar, $\vec{u}$: vector.

## COMBINACIÓ LINEAL

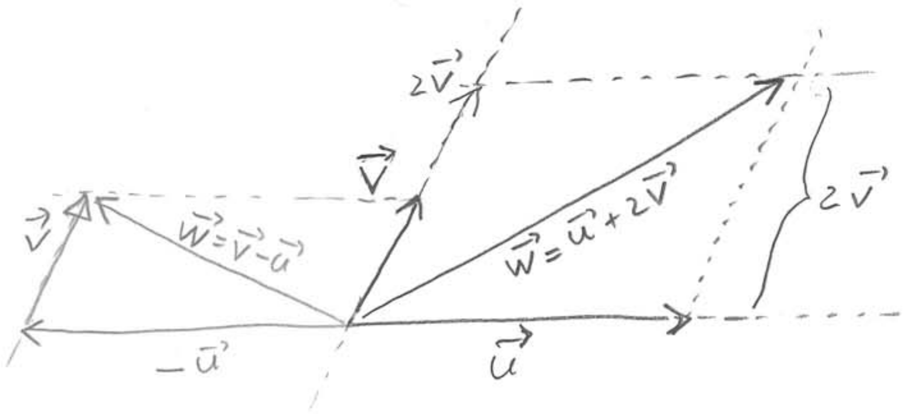
Una combinació lineal de vectors és <u>un vector</u>, obtingut a base de sumar i multiplicar vectors per escalars.

p.ex. $\vec{w}$ és combinació lineal d'$\vec{u}$ i $\vec{v}$

si $\vec{w} = 2\vec{v} + \vec{u}$

ó si $\vec{w} = \vec{v} - \vec{u}$

etc.




(gràficament)

Si, per exemple, $\vec{u} = (2,1,-3)$ i $\vec{v} = (1,1,0)$,

llavors $\vec{w} = 2\vec{v} + \vec{u} = 2\cdot(1,1,0) + (2,1,-3) =$

$= (2,2,0) + (2,1,-3) = (4,3,-3)$

i $\vec{w} = \vec{v} - \vec{u} = (1,1,0) - (2,1,-3) = (-1,0,3)$

(Analíticament)

En general, diem que un vector $\vec{w}$ és combinació lineal d'uns altres $\vec{u}, \vec{v}, \vec{r}, \vec{s}\ldots$

si $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} + \gamma\vec{r} + \delta\vec{s} + \ldots$

amb $\lambda, \mu, \gamma\ldots$ escalars

NOTA: Si pensem les equacions lineals com a vectors, el mètode de Gauss es limita a fer COMB. LINEALS d'equacions.

## 2.2 INTERPRETACIÓ FÍSICA

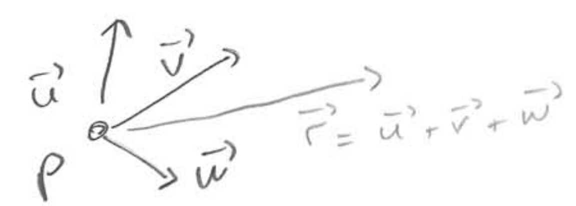
En estàtica, els vectors representen sobretot forces i moments. Ens fixem només en les forces, de moment.

### Resultant.

Un conjunt de forces $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\ldots$ aplicades sobre un punt P són equivalents a una única força, que anomenem resultant, (també sobre P), que és la suma de totes elles:

$$\boxed{\vec{r} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} + \ldots}$$

FORÇA RESULTANT

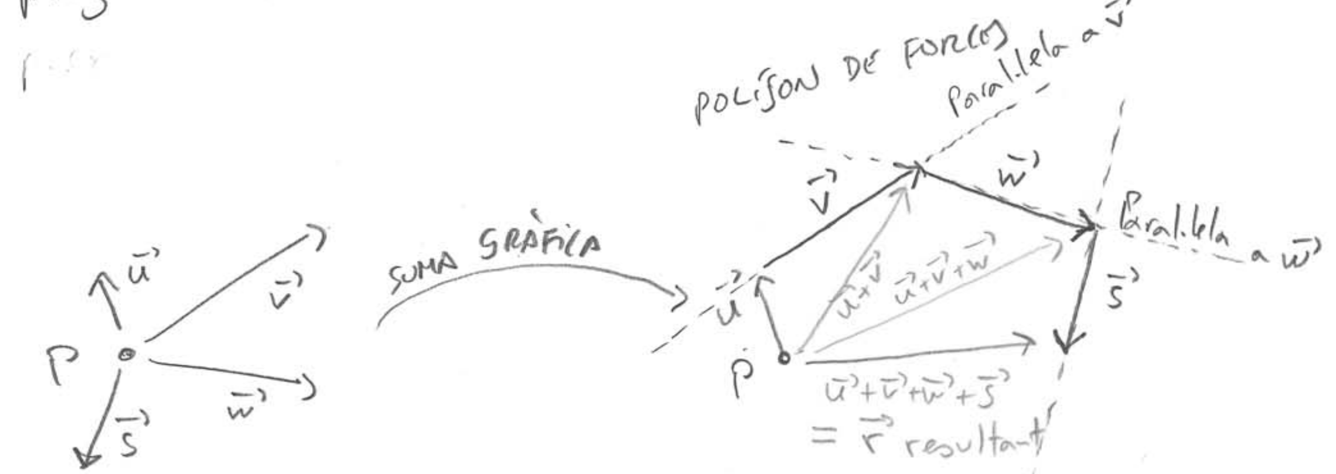


## Polígon de forces

Per trobar la resultant d'un conjunt de forces $\vec{u}, \vec{v}, \ldots$ aplicades sobre un punt P, podem fer-ho gràficament o analíticament (o sigui, sumant coordenades de vectors).

La suma gràfica, tal com s'ha explicat, es pot fer posant un vector a continuació de l'altre.

Si n'hi ha més de dos, la reiteració del procés porta a formar un polígon, que s'anomena polígon de forces:




El vector que té P per origen, i per extrem l'extrem de $\vec{s}$, és el vector suma de tots els altres, i és per tant la força resultant $\vec{r}$.