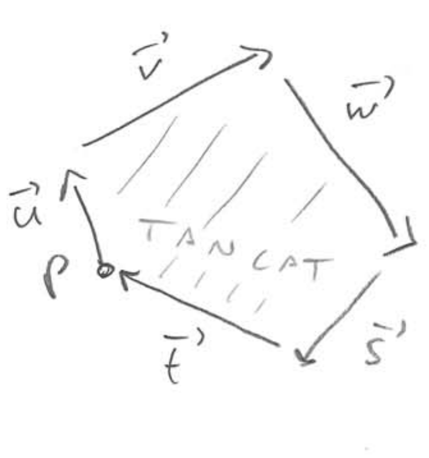
## Equilibri

Un conjunt de forces aplicades sobre un punt $P$ diem que estan en equilibri si la seva suma, o resultant, val $\vec{0}$.

NOTA: és important que el punt d'aplicació coincideixi per a totes elles.

Si $\vec{r} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} + \dots = \vec{0}$, la resultant no genera acceleracions en $P$ (equilibri). En canvi, si $\vec{r} \neq \vec{0}$ la massa que hi hagi en $P$ veurà acceleracions (no equilibri)

Gràficament, un conjunt de forces $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \dots$ aplicades sobre un mateix punt, estaran en equilibri si el polígon de forces és tancat, com a conseqüència del que hem dit al punt anterior.




~~Teor. de Lami~~

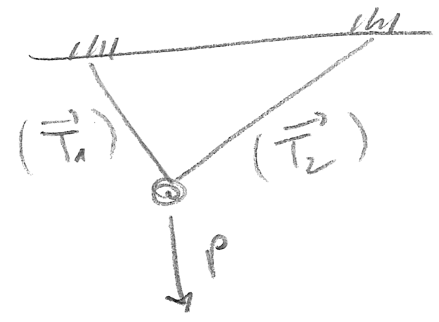
# Càlcul de la força equilibrant segons direccions donades.

Si un conjunt de forces aplicades sobre un punt P no estan en equilibri, $\vec{r} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} + \dots \neq \vec{0}$, la força $-\vec{r}$ s'anomena <u>equilibrant</u>.

(Naturalment, $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \dots, -\vec{r}$ estan en equilibri)

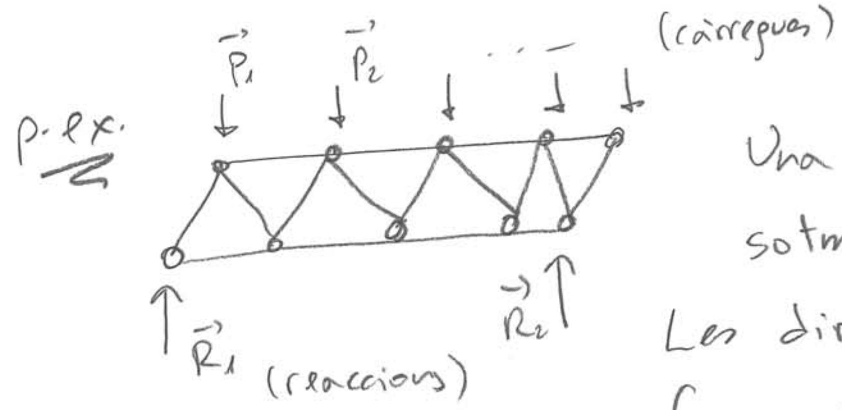
Una situació habitual consisteix en conèixer $\vec{r}$ (la resultant), i conèixer també la direcció de les possibles reaccions del sistema que poden equilibrar $\vec{r}$, però no les seves magnituds.

p. ex.



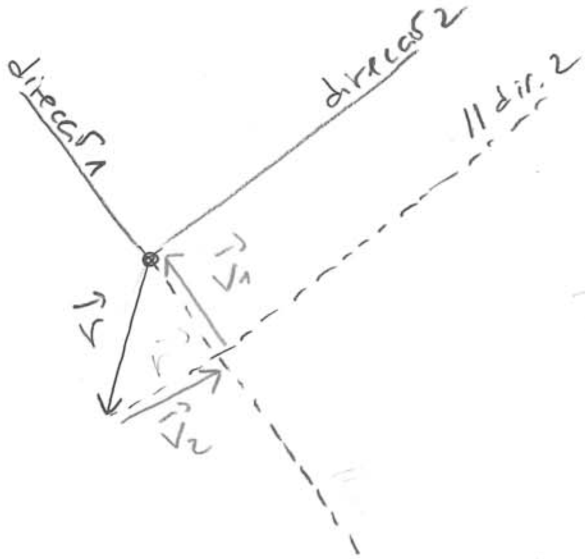

Pes penjat de dos cables. Coneixem les direccions dels cables, però no els valors de les tensions.

p. ex.




Una encavallada sotmesa a càrregues. Les direccions de les forces segueixen les barres.

En aquests casos, el procediment gràfic per a determinar la força (o forces) equilibrant consisteix en traçar paral·leles fins a formar un polígon tancat:



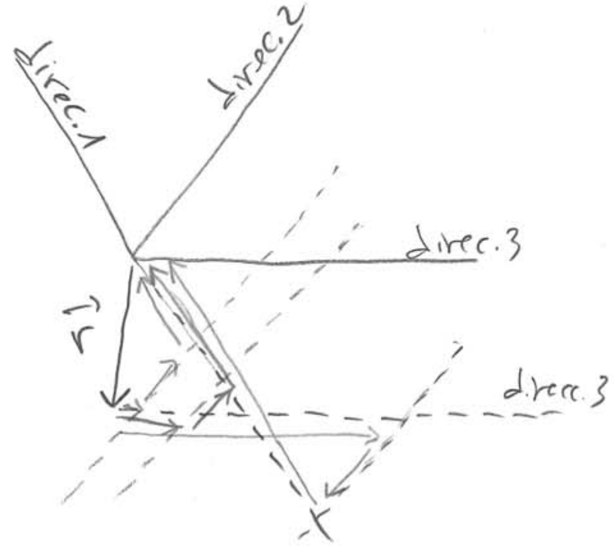

Allarguem la recta 1 i tracem paral·lela a 2 per l'extrem de $\vec{r}$. Finalment dibuixem vectors formant cicle.

$$\vec{r} + \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{0}$$

( L'equilibrant és $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ )

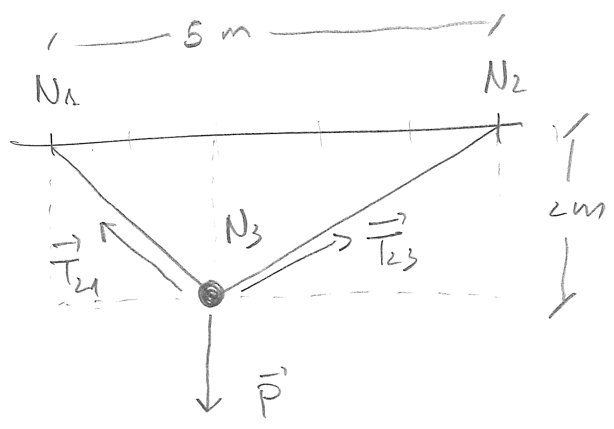
Observem que hem descompost $\vec{r}$ segons les dues direccions donades.

Si el nombre de direccions és gran (3 o més al pla, 4 o més a l'espai) el problema sol ser indeterminat, i trobem moltes descomposicions:




Quan resolguem aquest mateix problema analíticament (exemple següent) veurem que aquest cas es correspon a sistemes d'equacions indeterminats, amb solucions depenent de paràmetres.

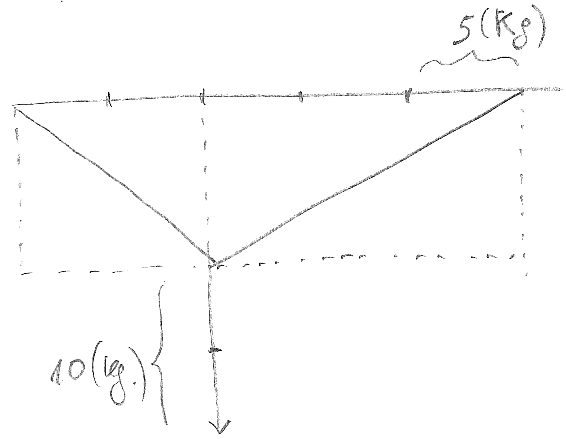
<u>EXEMPLE</u> Pes suspès de dos cables.



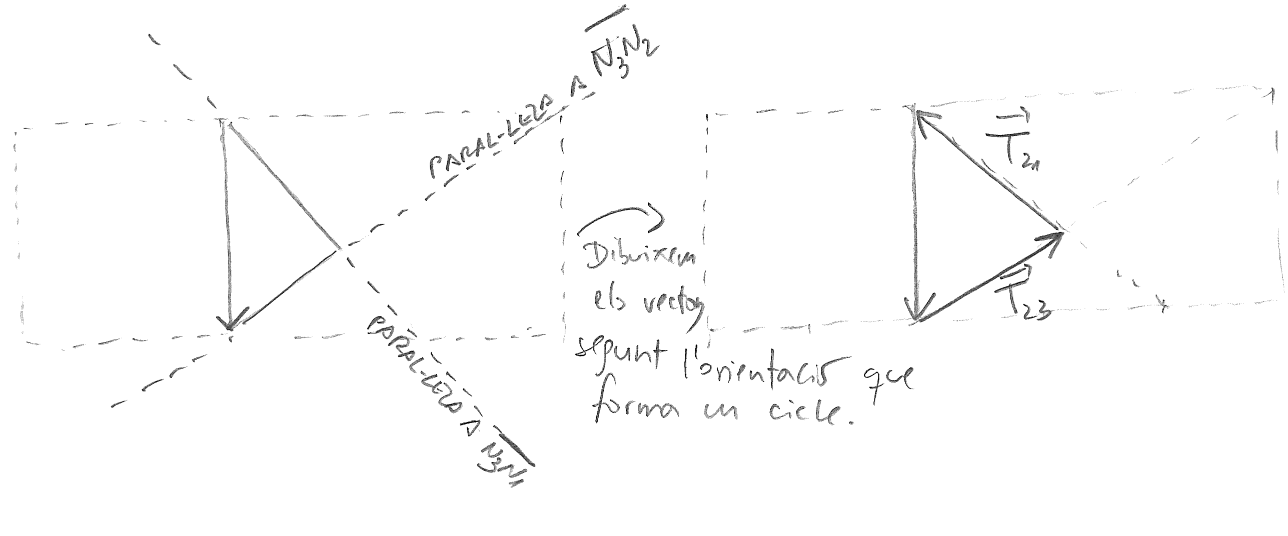

Per trobar les tensions dels cables $\vec{T}_{23}$ i $\vec{T}_{21}$ hem de descompondre $\vec{P}$ segons les direccions dels cables $\overline{N_3N_1}$ i $\overline{N_3N_2}$, de manera que $\vec{P}+\vec{T}_{21}+\vec{T}_{23}=\vec{0}$ (equilibri)

SOLUCIÓ gràfica

Suposem $\|\vec{P}\| = 10^{(kg)}$. Introduïm una escala per a les forces:

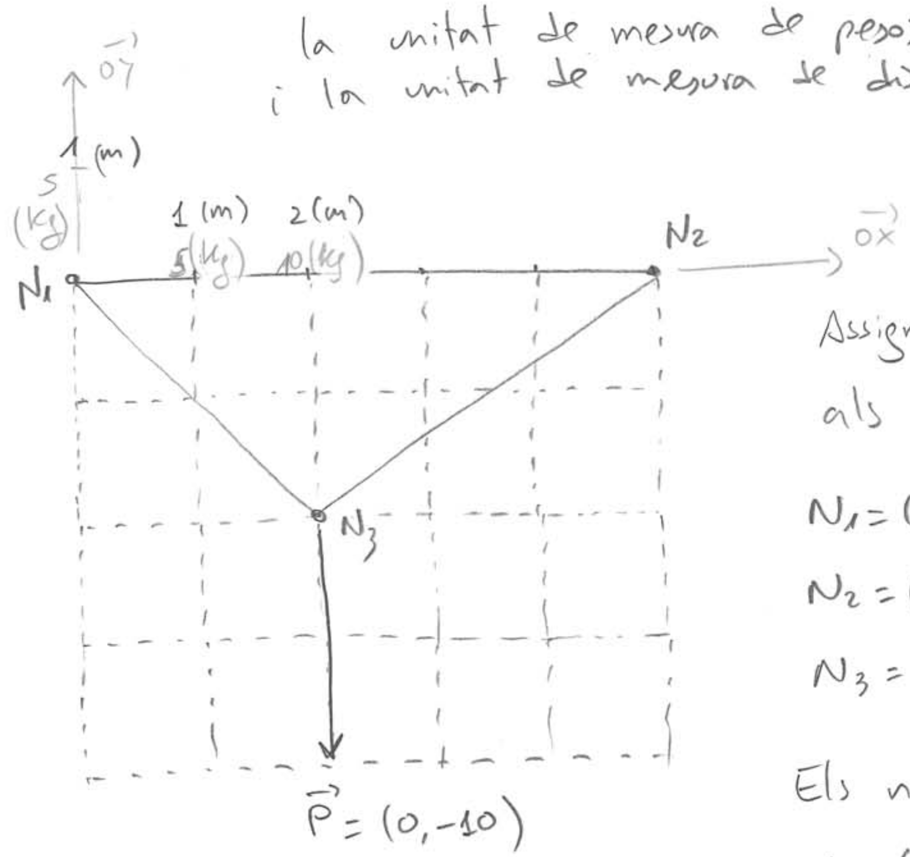



I dibuixem un polígon tancat, seguint les direccions dels cables:



SOLUCIÓ ANALÍTICA

Introduïm uns eixos de coordenades, i hi representem la unitat de mesura de pesos i la unitat de mesura de distàncies.




Assignem coordenades als nodes $N_1, N_2, N_3$:

$N_1 = (0,0)$

$N_2 = (5,0)$

$N_3 = (2,-2)$

Els nodes són punts, amb els quals formem els vectors directors dels cables (i de les tensions)

$$\overrightarrow{N_3N_2} = N_2 - N_3 = (5,0) - (2,-2) = (3,2)$$

$$\overrightarrow{N_3N_1} = N_1 - N_3 = (0,0) - (2,-2) = (-2,2)$$

A continuació, imposem la condició d'equilibri:

$$\vec{T}_{32} + \vec{T}_{31} + \vec{P} = \vec{0}$$

que ens proporciona dues equacions:

$$\left.\begin{array}{l} [\text{Eq. I}]\ T_{32x} + T_{31x} + 0 = 0 \\ [\text{Eq. II}]\ T_{32y} + T_{31y} - 10 = 0 \end{array}\right\} \quad \text{on } \begin{array}{l} \vec{T}_{32} = (T_{32x}, T_{32y}) \\ \vec{T}_{31} = (T_{31x}, T_{31y}) \end{array}$$

De moment tenim 2 equacions i 4 incògnites.

Ens calen dues equacions més, que ens les donen les direccions dels cables:

$$\vec{T}_{32} \parallel \overrightarrow{N_3N_2} : \begin{vmatrix} T_{32x} & 3 \\ T_{32y} & 2 \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow \boxed{2T_{32x} - 3T_{32y} = 0} \quad (\text{Eq III})$$

**NOTA**: fem servir el determinant i la idea que dos vectors linealment dependents tenen determinant nul. Ho justificarem més endavant.

Una via alternativa a l'ús de determinants:

$$\vec{T}_{32} \parallel \overrightarrow{N_3N_2} : (T_{32x}\ T_{32y}) = \alpha \cdot (3,2)$$

$$\left.\begin{aligned} 3\alpha &= T_{32x} \\ 2\alpha &= T_{32y} \end{aligned}\right\} \quad \alpha = \frac{T_{32x}}{3} = \frac{T_{32y}}{2} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \boxed{2 \cdot T_{32x} - 3T_{32y} = 0} \quad (\text{Eq III})$$

Semblantment,

$$\vec{T}_{31} \parallel \overrightarrow{N_3N_1} : \begin{vmatrix} T_{31x} & -2 \\ T_{31y} & 2 \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow \boxed{2T_{31x} + 2T_{31y} = 0} \quad (\text{Eq. IV})$$

Per tant, la solució del sistema

$$\left.\begin{array}{ll} (\text{Ep. I}) & \overline{T}_{32x} + \overline{T}_{31x} = 0 \\ (\text{Ep. II}) & \overline{T}_{32y} + \overline{T}_{31y} = 10 \\ (\text{Ep. III}) & 2\overline{T}_{32x} - 3\overline{T}_{32y} = 0 \\ (\text{Ep. IV}) & 2\overline{T}_{31x} + 2\overline{T}_{31y} = 0 \end{array}\right\}$$

ens donarà els vectors tensió.

Escrivim el sistema en forma matricial:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} \overline{T}_{32x} \\ \overline{T}_{32y} \\ \overline{T}_{31x} \\ \overline{T}_{31y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calculant la inversa de M,

$$\begin{pmatrix} \overline{T}_{32x} \\ \overline{T}_{32y} \\ \overline{T}_{31x} \\ \overline{T}_{31y} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0'6 & 0'6 & 0'2 & -0'3 \\ 0'4 & 0'4 & -0'2 & -0'2 \\ 0'4 & -0'6 & -0'2 & 0'3 \\ -0'4 & 0'6 & 0'2 & 0'2 \end{pmatrix}}_{M^{-1}} \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

D'on $\overline{\vec{T}}_{32} = (6,4)$ i $\overline{\vec{T}}_{31} = (-6,6)$

Finalment, els mòduls de les tensions són:

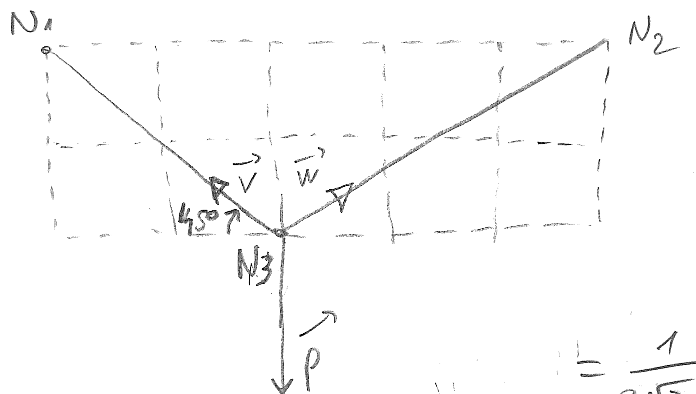
$$\|\vec{T}_{32}\| = \sqrt{6^2+4^2} = \sqrt{52}\ (kg)$$

$$\|\vec{T}_{31}\| = \sqrt{(-6)^2+6^2} = \sqrt{72}\ (kg)$$

Observem que un problema senzill genera un nombre considerable d'equacions. Això fa que el mètode analític sigui adequat, sobretot, per a la resolució amb ordinador.

SOLUCIÓ ANALÍTICA (segon mètode)

A la pràctica, si es vol fer resolució analítica manual, se sol adoptar una estratègia diferent (aparentment), basada en vectors unitaris.




$$\vec{v} = \frac{\overrightarrow{N_3N_1}}{\|\overrightarrow{N_3N_1}\|} = \frac{1}{\|(-2,2)\|}(-2,2) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}(-2,2) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) =$$

( $= (\cos 45°, \sin 45°)$ expressió útil si coneixem l'angle del cable respecte a $\vec{Ox}$ )

2,19

$$\vec{w} = \frac{\overrightarrow{N_3N_2}}{\|\overrightarrow{N_3N_2}\|} = \frac{1}{\|(3,2)\|}(3,2) = \left(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right)$$

Llavors imposem:

$$T_{31} \cdot \vec{v} + T_{32}\,\vec{w} + \vec{P} = \vec{0} \quad \text{on} \quad T_{31} = \|\overrightarrow{T_{31}}\|, \quad T_{32} = \|\overrightarrow{T_{32}}\|$$

$$T_{31}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + T_{32}\left(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right) = (0, 10)$$

I, component a component,

$$\left.\begin{aligned} -\frac{T_{31}}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{13}} T_{32} &= 0 \\ \frac{T_{31}}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{13}} T_{32} &= 10 \end{aligned}\right\}$$

sistema de 2 eqs. i 2 incògnites que ens dóna directament les tensions en mòdul, $T_{31}$ i $T_{32}$

$$T_{31} = \sqrt{72} \ (\text{kg})$$
$$T_{32} = \sqrt{52}$$