2.3 INTERPRETACIÓ GEOMÈTRICA:

REPRESENTACIÓ DE VARIETATS (RECTES, PLANS...)

Les operacions amb vectors que hem introduït ens permeten també de representar varietats lineals, juntament amb els sistemes d'equacions.

La paraula varietat, o varietat lineal, serveix per fer referència a plans, rectes... de forma general, sense especificar l'objecte concret. Presentem la teoria sobre els exemples bi i tridimensionals (plans i rectes), però fàcilment es generalitza a objectes en espais de dimensió més gran.

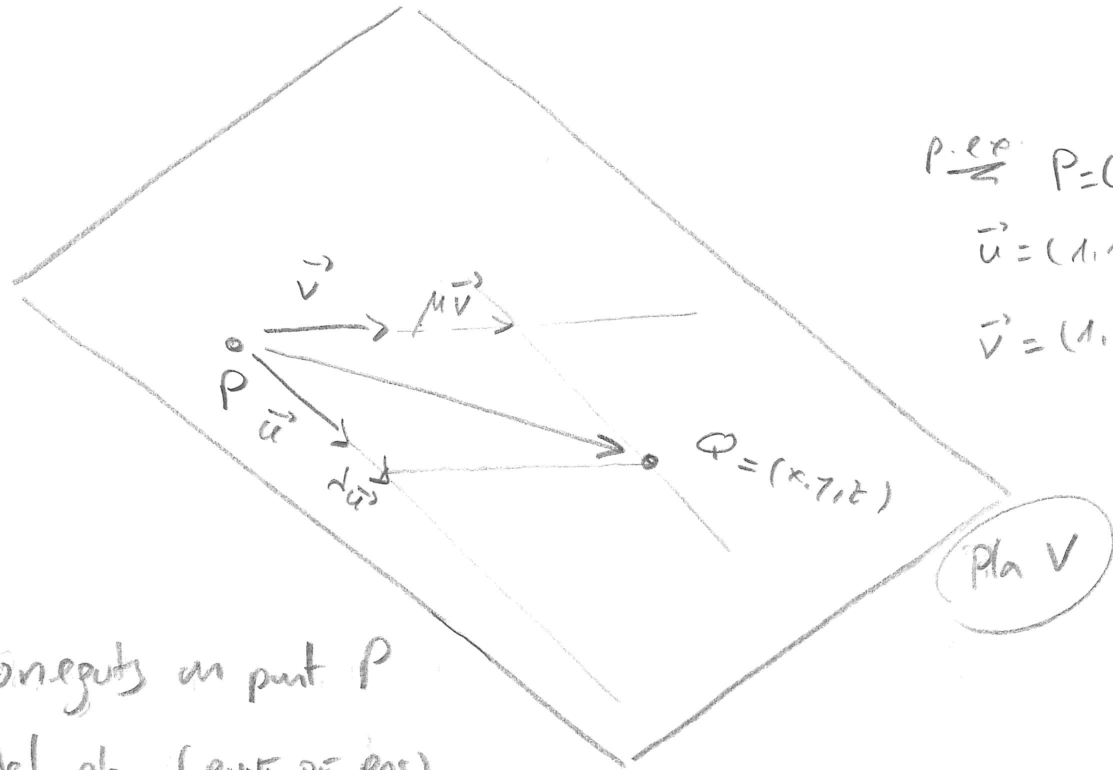
Bàsicament considerem dos problemes diferents:

1. Generar punts d'una varietat, donada a partir de punts i vectors [REPRESENTACIÓ PARAMÈTRICA]

2. Comprovar si un punt donat és d'una varietat [REPRESENTACIÓ IMPLÍCITA]

Representació paramètrica i implícita d'un pla a l'espai:

Les operacions amb punts i vectors que hem estudiat permeten d'obtenir els punts de tot un pla.



p.ex $P = (1, 0, -1)$

$\vec{u} = (1, 1, 0)$

$\vec{v} = (1, 2, 2)$

Coneguts un punt P del pla (PUNT DE PAS) i dos vectors continguts al pla (VECTORS DIRECTORS) podem obtenir qualsevol punt $Q = (x, y, z)$ del pla fent: $\vec{PQ} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$

o sigui, $Q = P + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$

$$(x, y, z) = (1, 0, -1) + \lambda(1, 1, 0) + \mu(1, 2, 2)$$

Variant λ, μ anem obtenint nous punts Q sempre del pla.

p.ex $\lambda = 1, \mu = -1 \longrightarrow Q = (1, 0, -1) + 1\,(1, 1, 0) - 1\cdot(1, 2, 2) = (1, -1, -3)$

...

Diem que hem representat el pla V de forma **paramètrica**. Qualsevol de les tres representacions següents és paramètrica (o explícita):

Punt de pas $P=(1,0,-1)$

Vectors directors $\vec{u}=(1,1,0)$ $\vec{v}=(1,2,2)$

o GENERADORS

$$(x,y,z) = (1,0,-1) + \lambda(1,1,0) + \mu(1,2,2)$$

(També anomenada vectorial)

$$\begin{cases} x = 1+\lambda+\mu \\ y = \lambda + 2\mu \\ z = -1 + 2\mu \end{cases}$$ (Eqcs. paramètriques)

Són equivalents, i és immediat obtenir-ne una a partir d'una altra.

Recíprocament, si ens donen un punt $Q=(x,y,z)$ i volem saber si és o no del pla, haurem de trobar, si existeixen, els valors λ i μ t.q.

$$(x,y,z)=(1,0,-1)+\lambda(1,1,0)+\mu(1,2,2)$$

Ara (x,y,z) és conegut, i λ i μ desconeguts.

p.ex. $(x,y,z)=(1,-1,-3)$ o $(x,y,z)=(0,0,2)$

$$Q=(1,-1,-3)=(1,0,-1)+\lambda(1,1,0)+\mu(1,2,2)$$

El punt Q serà del pla si podem resoldre λ,μ en el sistema d'equacions:

$$\left.\begin{array}{l}\lambda+\mu+1=1\\ \lambda+2\mu+0=-1\\ 0\cdot\lambda+2\mu-1=-3\end{array}\right\}\quad \begin{pmatrix}1&1\\1&2\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\-2\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c}\begin{array}{cc}\lambda&\mu\end{array}\\ \left(\begin{array}{cc|c}1&1&0\\1&2&-1\\0&2&-2\end{array}\right)\end{array}\xrightarrow[2^aF=2^aF-1^aF]{}\begin{array}{c}\begin{array}{cc}\lambda&\mu\end{array}\\ \left(\begin{array}{cc|c}1&1&0\\0&1&-1\\\cancel{0}&\cancel{2}&\cancel{-2}\end{array}\right)\end{array}\rightarrow\boxed{\begin{array}{l}\mu=-1\\ \lambda=1\end{array}}$$

En canvi, si $Q=(0,0,2)$, el sistema

$$\left.\begin{array}{l}\lambda+\mu+1=0\\ \lambda+2\mu+0=0\\ 0\lambda+2\mu-1=2\end{array}\right\}\rightarrow\left(\begin{array}{cc|c}1&1&-1\\1&2&0\\0&2&3\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cc|c}1&1&-1\\0&1&1\\0&2&3\end{array}\right)\rightarrow$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{cc|c}1&1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right)\ \text{INCOMPATIBLE}$$

No existeixen, per tant, λ i μ, i veiem que $Q=(0,0,2)$ <u>no</u> és del pla V.

Fem-ho ara pel punt $Q=(x,y,z)$ (genèric)

$$\left.\begin{aligned} \lambda+\mu+1 &= x \\ \lambda+2\mu+0 &= y \\ 0\lambda+2\mu-1 &= z \end{aligned}\right\} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x-1 \\ 1 & 2 & y-0 \\ 0 & 2 & z+1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x-1 \\ 0 & 1 & y-x+1 \\ 0 & 2 & z+1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x-1 \\ 0 & 1 & y-x+1 \\ 0 & 0 & z+1-2y+2x-2 \end{array}\right)$$

El punt $Q=(x,y,z)$ és del pla V si $\boxed{z-2y+2x-1=0}$

Si $z-2y+2x-1 \neq 0$, el sistema és incompatible, i no existeixen λ i μ.

$\boxed{2x-2y+z=1}$ és <u>l'equació implícita</u> de V

Serveix per comprovar si un punt $Q=(x,y,z)$ és o no del pla V.

Representació paramètrica i implícita d'una recta a l'espai.

Conegut un punt de pas P de la recta r, i un vector director $\vec{v}$, els punts de r es generen fent $(x,y,z) = P + \lambda \vec{v}$

Si $P = (1,0,-1)$ i $\vec{v} = (1,2,2)$,

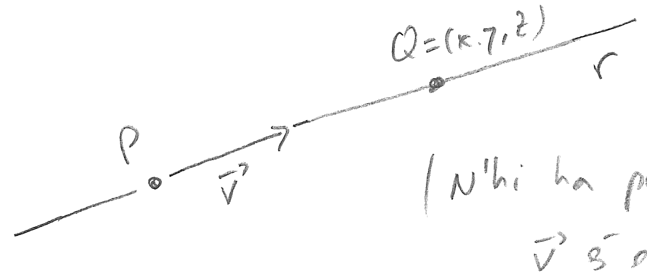
$$\boxed{(x,y,z) = (1,0,-1) + \lambda(1,2,2)}$$

EQCS. VECTORIAL,

o també:

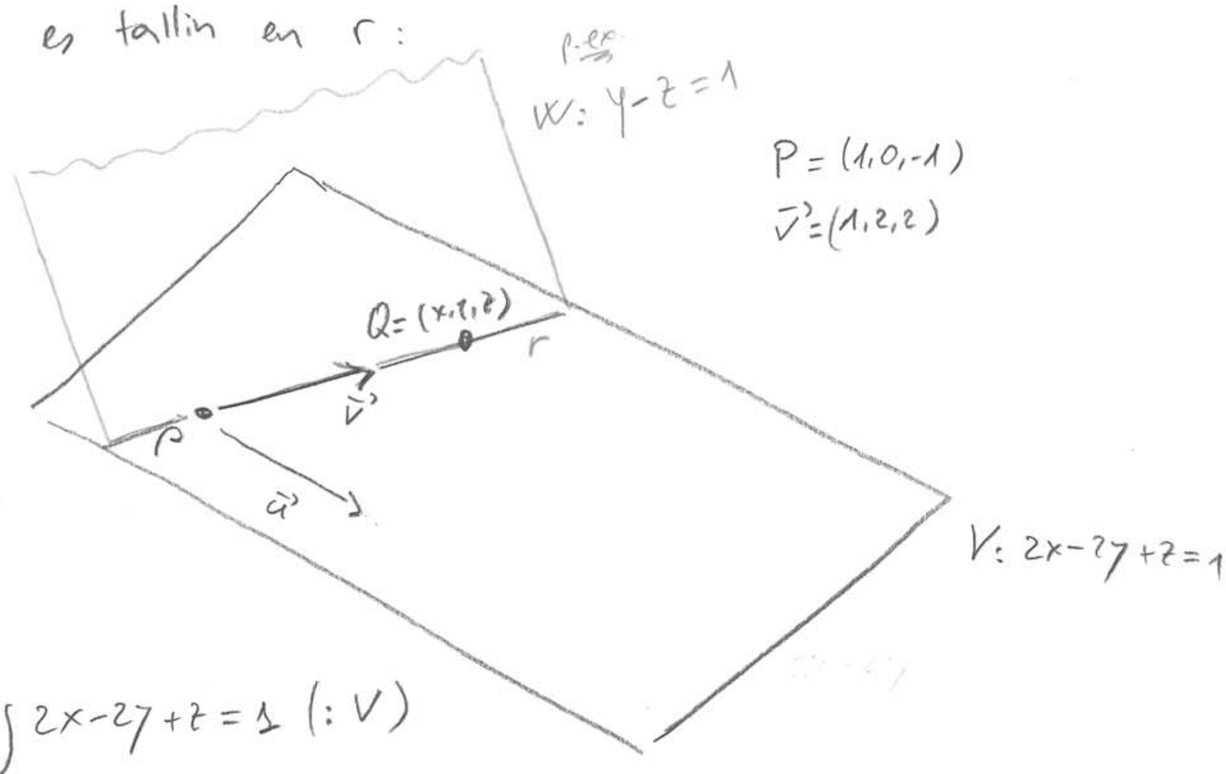
$$\boxed{\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}}$$

EQCS. PARAMÈTRIQUES,



(N'hi ha prou amb un sol vector)
$\vec{v}$ és el generador

Anem ara a obtenir les equacions implícites.
Donat un punt (x,y,z), per comprovar si és de la recta r, podem veure si satisfà les equacions de 2 plans que es tallin en r:



$$r: \begin{cases} 2x-2y+z=1 \ (:V) \\ y-z=1 \ (:W) \end{cases}$$

Ara, com podem obtenir les equacions de dos plans que, com V i W, tinguin la recta r en comú?
Com en el cas del pla, el punt $Q=(x,y,z)$ serà de r si $(x,y,z)=(1,0,-1)+\lambda(1,2,2)$ per algun valor (desconegut) de λ.