Això vol dir que

$$\left.\begin{aligned} x-1 &= \lambda \\ y-0 &= 2\lambda \\ z+1 &= 2\lambda \end{aligned}\right\}$$ ha de ser compatible

(λ única incògnita. x, y, z dades del problema)

Escrivim la matriu del sistema i apliquem Gauss:

$$\begin{array}{c} \lambda \\ \left(\begin{array}{c|c} 1 & x-1 \\ 2 & y \\ 2 & z+1 \end{array}\right) \end{array} \longrightarrow \boxed{\left(\begin{array}{c|c} 1 & x-1 \\ 0 & y-2(x-1) \\ 0 & z+1-2(x-1) \end{array}\right)}$$

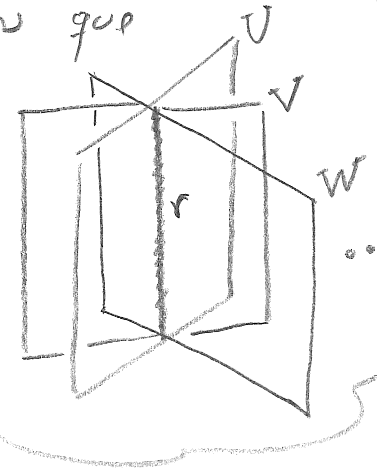
$$\downarrow$$

$$\left.\begin{aligned} y-2x+2 &= 0 \\ z-2x+3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$ Condicions que fan el sistema anterior compatible, i per tant, que haurà de satisfer un punt $Q=(x,y,z)$ de la recta.

Observem que no hem obtingut els mateixos plans que abans, sinó $U: 2x - y = 2$ i $V: 2x - z = 3$

És natural: hi ha molts parells de plans que es tallen en la mateixa recta r:

"Feix de plans"



<u>Observació : pas de representació implícita a paramètrica</u>

A la lliçó 1 (sistemes d'equacions lineals) ja s'ha estudiat com passar de la representació implícita d'una varietat a la paramètrica : <u>resolent el sistema.</u>

La <u>representació implícita</u> és, simplement, un <u>sistema d'equacions lineals.</u>

La <u>representació paramètrica</u> n'és la <u>solució</u>, expressada en funció de paràmetres.

Ho fem pels dos exemples anteriors:

1^{r} ex: A partir de l'equació implícita del pla, $2x-2y+z=1$, volem obtenir les paramètriques.

Simplement, resolem l'equació:

2.29

Resolent l'equació:

$$2x-2y+z=1 \longrightarrow z=1-2x+2y \longrightarrow$$

$$\longrightarrow (x,y,z)=(x,y,1-2x+2y)=$$

$$=(0,0,1)+(x,0,-2x)+(0,y,2y)=$$

$$=\underbrace{(0,0,1)}_{\text{PUNT DE PAS}}+\underbrace{x\cdot(1,0,-2)+y(0,1,2)}_{\text{VECTORS DIRECTORS}}$$, o GENERADORS

$$(x,y,z)=(0,0,1)+\lambda(1,0,-2)+\mu(0,1,2)$$

Observem que hem obtingut un punt de pas i uns vectors directors diferents $P'=(0,0,1)\neq(1,0,-1)=P$

$\vec{u}'=(1,0,-2)\neq\vec{u}=(1,1,0)$ $\quad \vec{v}'=(0,1,2)\neq\vec{v}=(1,2,2)$

Naturalment, hi ha molts punts de pas i molts vectors directors vàlids per donar un pla.

p. ex. A partir de l'equació implícita de la recta de l'exemple anterior $\left.\begin{array}{l} 2x-y=2 \\ 2x-z=3 \end{array}\right\}$

volem obtenir-ne les equacions paramètriques.

Escrivim el sistema en forma matricial:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & & \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|cc|c} 2 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \end{array} \xrightarrow[\text{com a paràmetre}]{\text{passem } x} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} y & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 2-2x \\ 0 & -1 & 3-2x \end{array}\right) \end{array} \longrightarrow$$

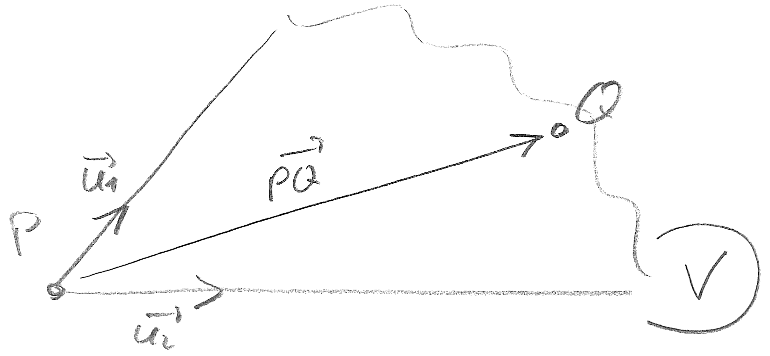
$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2+2x \\ 0 & 1 & -3+2x \end{array}\right) \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=-2+2x \\ z=-3+2x \\ x \text{ paràmetre} \end{array}\right.$$

$$(x,y,z)=(x,-2+2x,-3+2x)=(0,-2,-3)+\underbrace{x}_{x=\lambda}(1,2,2)=$$

$$\boxed{=(0,-2,-3)+\lambda(1,2,2)}$$

Hem obtingut un punt de pas diferent, però el mateix vector director

En general, una varietat V es pot expressar mitjançant equacions implícites o paramètriques.



La relació entre equacions implícites i paramètriques és la següent:

$$V = P + \alpha_1 \vec{u_1} + \alpha_2 \vec{u_2} + \dots$$

PUNT DE PAS · COMBINACIÓ LINEAL DELS VECTORS DIRECTORS

REPRESENTACIÓ PARAMÈTRICA

PAS DE PARAM. A IMPLÍCIT:
Imposem que $\vec{PQ}$ és combinació lineal dels $\vec{u_1}, \vec{u_2}$

PAS D'IMPLÍCIT A PARAMÈT.:
Resolem el sistema en funció de paràmetres (mèt. de Gauss)

$$V: \begin{cases} a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \dots = m \\ b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + \dots = n \\ c_1 x_1 + \dots \quad \dots \end{cases}$$

SISTEMA D'EQUACIONS LINEALS

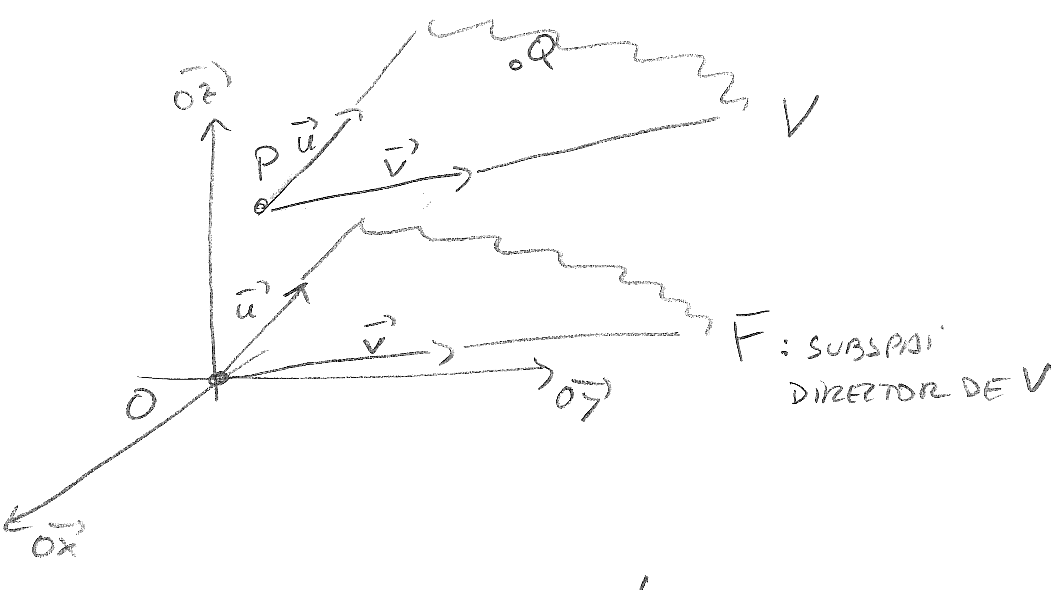
$Q = (x_1, x_2, x_3 \dots)$ és de V si n'és solució

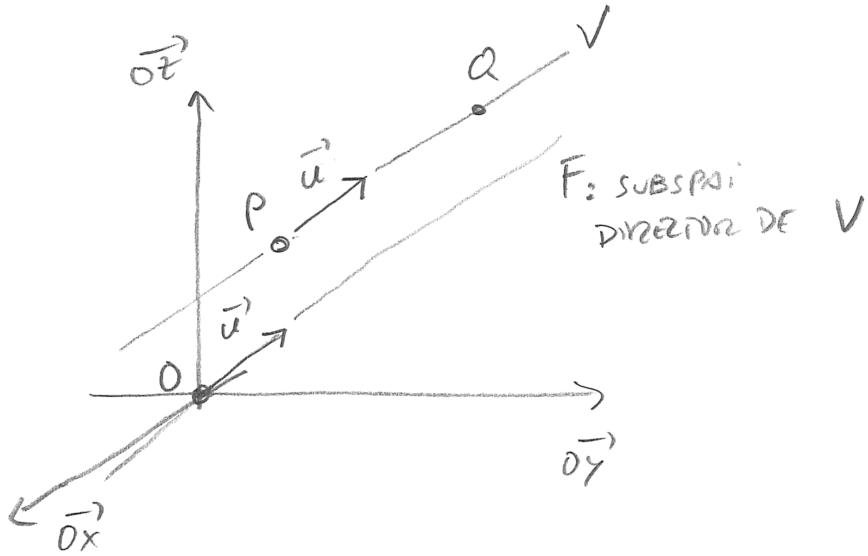
REPRESENTACIÓ IMPLÍCITA

SUBSPAI GENERAT.

Les varietats (rectes, plans...) que passen per l'origen de coordenades O s'anomenen <u>subspais</u>.

Donada una varietat V, una altra varietat F paral·lela a V i que passi per l'origen O s'anomena el <u>subspai director</u> de V





Quina relació hi ha entre les equacions de V i F?

EQUACIONS PARAMÈTRIQUES: si $V = P + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} + \dots$

llavors $F = 0 + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} + \dots = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} + \dots$

Per tant, F és el conjunt de totes les combinacions lineals dels vectors $\vec{u}, \vec{v}, \dots$

NOTACIÓ $F = [\vec{u}, \vec{v}, \dots] \stackrel{\text{def}}{=}$

$= \{\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \dots$ amb $\lambda, \mu, \dots$ qualssevol$\}$

p.ex. (Seguint amb un exemple anterior)

$$V: (x,y,z) = \underbrace{(1,0,-1)}_{P} + \lambda\underbrace{(1,1,0)}_{\vec{u}} + \mu\underbrace{(1,2,2)}_{\vec{v}}$$ (PLA A L'ESPAI)

$$F: (x,y,z) = (0,0,0) + \lambda(1,1,0) + \mu(1,2,2) =$$

(PLA A L'ESPAI PER L'ORIGEN) $= \lambda(1,1,0) + \mu(1,2,2) = [(1,1,0), (1,2,2)]$

Observem que els subspais estan formats per vectors.

Es diu que els vectors $\vec{u}, \vec{v} \dots$ són els generadors del subspai $F = [\vec{u}, \vec{v} \dots]$, i es diu que F és el subspai generat per $\vec{u}, \vec{v} \dots$.

També sovint s'escriu $V = P + F$ o $V = P + [\vec{u}, \vec{v} \dots]$ en comptes de les equacions paramètriques de V.

EQUACIONS IMPLÍCITES: si V està representat per un sistema d'equacions lineals $A \cdot X = m$ t.q. les seves solucions són precisament els punts de V

$$V: \begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots = m \\ b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots = n \\ c_1x_1 + \cdots = \cdots \\ \cdots \end{cases}$$

llavors la representació implícita de F és el mateix sistema d'equacions però amb tots els termes independents nuls (sistema homogeni)

$$F: \begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots = 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots = 0 \\ c_1x_1 + \cdots = 0 \\ \cdots \end{cases}$$

p.ex. (Seguint amb un exemple anterior)

$$V: \begin{cases} 2x - 2y + z = 1 \\ y - z = 1 \end{cases}$$

$$F: \begin{cases} 2x - 2y + z = 0 \\ y - x = 0 \end{cases}$$