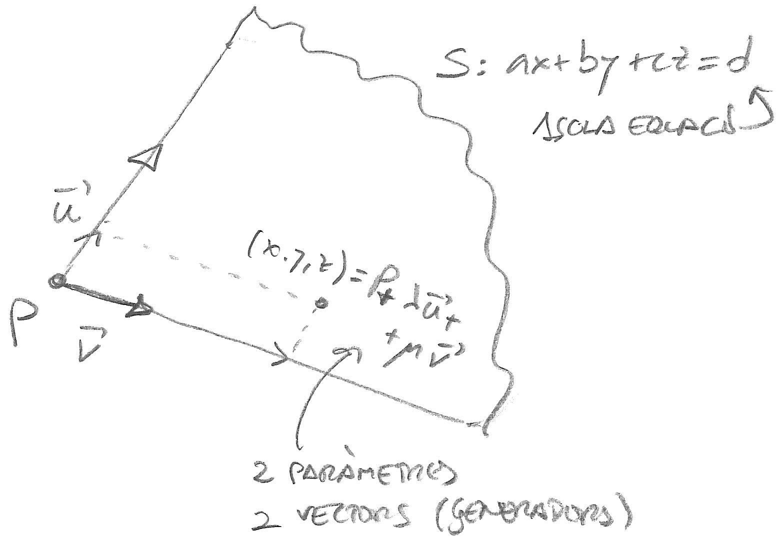
2.4 SUBSPAI DIRECTOR. DIMENSIÓ.



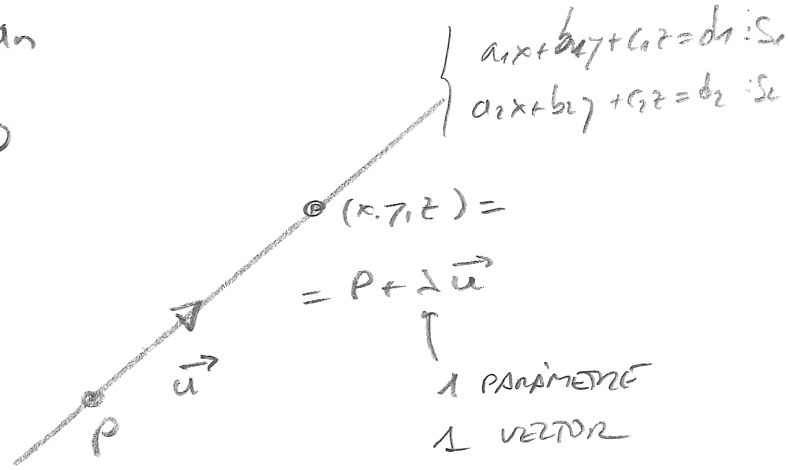
A l'apartat anterior hem generat <u>un pla</u> amb 2 paràmetres λ i μ (ó 2 generadors $\vec{u}, \vec{v}$) i l'hem obtingut com a solució d'1 equació implícita:

$$S: ax+by+cz=d$$

En canvi, hem generat una recta amb 1 sol paràmetre λ (ó 1 generador $\vec{u}$), però han calgut 2 equacions implícites

$$\left.\begin{array}{l} S_1: a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ S_2: a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \end{array}\right\}$$

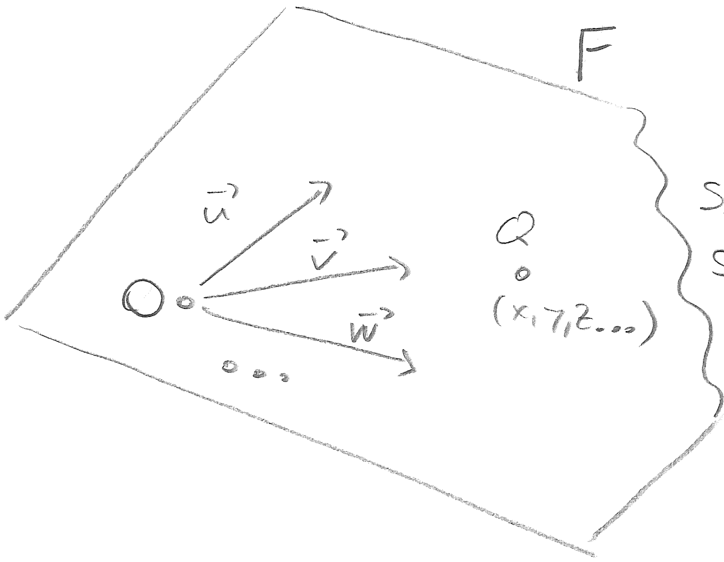
per obtenir-la.



<u>ENS PREGUNTEM</u>: • <u>Quants paràmetres</u> (o generadors) calen per generar una varietat V? (= dim V)

• <u>Quantes equacions implícites</u> calen per determinar V? (= rang S)

Naturalment, la resposta no varia si, en comptes de V, considerem el seu <u>subspai director</u> $\underline{E}$, paral·lel a V per O.



$$S\left\{\begin{array}{l} S_1: a_1x+b_1y+c_1z=0 \\ S_2: a_2x+b_2y+c_2z=0 \\ S_3: a_3x+b_3y+c_3z=0 \\ \quad \ldots \end{array}\right.$$

Si tenim <u>representacis per paràmetres</u> $\lambda, \mu, \gamma \ldots$ (o per generadors $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \ldots$) podem suprimir els vectors que s'obtenen com a <u>combinació lineal</u> dels altres (p.ex. si $\vec{w} = 2\vec{u} + \vec{v}$, llavors $\cancel{\vec{w}}$)

Si tenim <u>equacions implícites</u>, podem suprimir les que s'obtenen com a combinació lineal de les altres (p.ex. fent zeros amb el <u>mètode de Gauss</u>)

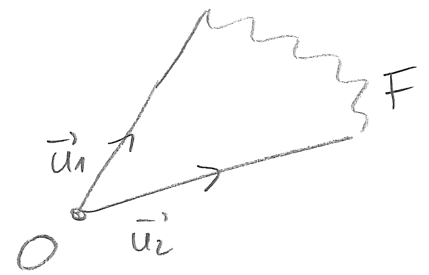
(observeu que fem el mateix amb vectors i equacions,)

<u>NOTA</u>: $\boxed{\begin{array}{l} \dim V + \text{rang } S = n \\ (n \text{ nombre de variables } x,y,z,\ldots) \end{array}}$ T^a de Rouché

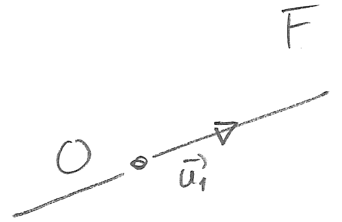
DIMENSIÓ I BASE.

La <u>dimensió</u> d'un subespai F és el <u>nombre mínim de vectors</u> que calen per generar F.

p.ex. ⇒



La dimensió d'un <u>pla</u> és 2



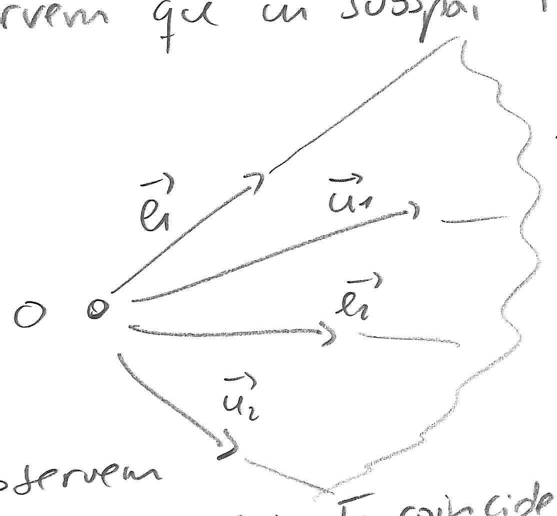
La dimensió d'una <u>recta</u> és 1

Si els vectors $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \dots$

- generen F (i.e. $F = [\vec{u}_1, \vec{u}_2 \dots]$)
- igualen el nombre mínim (dim)

diem que $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \dots$ són <u>base de F</u>.

<u>NOTA</u>: Observem que un subespai F té moltes bases diferents



$F = [\vec{e}_1, \vec{e}_2] = [\vec{u}_1, \vec{u}_2]$

(si F és un pla)

<u>NOTA</u>: Observem que la dimensió de F coincideix amb el nombre mínim de paràmetres de les seves equacions paramètriques, perquè

$F = \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \dots$, si $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \dots$ són base.

Donat un conjunt de generadors de F,

$F = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \ldots]$, <u>com sabem si són base?</u>

Ens cal saber si igualen el nombre mínim de generadors.

La idea és prescindir d'aquells generadors que són combinació lineal dels restants, i per tant poden ser generats a partir d'ells.

<u>p.ex.</u> $F = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ amb $\vec{u} = (1,0,-2)$
$\vec{v} = (0,1,2)$
$\vec{w} = (2,1,-2)$

Volem trobar la dimensió i una base de F.

Observem que $\vec{w} = 2\vec{u} + \vec{v}$

Si $\vec{r} = (x,y,z)$ és un vector qualsevol de F,

llavors $(x,y,z) = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} + \nu\vec{w} =$

$$\underset{\text{substituïm } \vec{w}}{=} \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} + \nu(2\vec{u} + \vec{v}) = \underbrace{(\lambda + 2\nu)}_{\lambda'}\vec{u} + \underbrace{(\mu + \nu)}_{\mu'}\vec{v}$$

Per tant, $(x,y,z) = \lambda'\vec{u} + \mu'\vec{v}$, i amb només dos vectors (o dos paràmetres), podem obtenir $\vec{r} = (x,y,z)$. Així, $\vec{w}$ és prescindible. Ho expressem:

$$F = [\vec{u}, \vec{v}, \cancel{\vec{w}}] = [\vec{u}, \vec{v}]$$

Ara, com que $\vec{u} = (1,0,-2) \neq \alpha \cdot (0,1,2)$ per tot α,

no podrem prescindir de cap dels dos vectors.

Resulta que $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ és una base de F,

i que $\dim F = 2$.

Això ens porta a definir el concepte

de <u>dependència lineal</u>.

Dos o més vectors $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$... són <u>linealment dependents</u> si algun d'ells es pot escriure com a <u>combinació lineal</u> dels altres.

(<u>Linealment independents</u> en cas contrari)

Les equacions paramètriques tenen el mínim nombre possible de paràmetres si els generadors (vectors directors) són <u>linealment independents</u>.

(<u>Nota:</u> un sol vector $\vec{u}$ és linealment independent si $\vec{u} \neq \vec{0}$)

Per obtenir dim V, fem:

1.- Comencem amb un conjunt de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$...

2.- Busquem combinacions lineals entre ells, i eliminem els que sobren.

3. Quan tenim un <u>conjunt de generadors</u> que són <u>linealment independents</u>, hem acabat. La dimensió $\boxed{\dim(V) = \text{nombre de vectors de la base.}}$

DEPENDÈNCIA LINEAL i EQUACIONS IMPLÍCITES

Dues o més equacions

$$S_1: a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
$$S_2: a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$
$$S_3: a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$
$$\dots$$

són <u>linealment dependents</u>

si una d'elles es pot obtenir a partir de les altres

fent <u>combinació lineal</u>

<u>p. ex.</u>

$$\left.\begin{array}{l} S_1: 2x - y = 2 \\ S_2: 2x - z = 3 \\ S_3: y - z = 1 \end{array}\right\} S$$

Observem que:

$$\begin{array}{r} \cancel{2x} - y = 2 \\ - \quad \cancel{2x} - z = 3 \\ \hline z - y = -1 \end{array} \longrightarrow y - z = 1 : S_3$$

Per tant, la condició S_3 no aporta cap restricció addicional a les S_1 i S_2, i en podem prescindir.

$$\left.\begin{array}{l} S_1: 2x - y = 2 \\ S_2: 2x - z = 3 \\ S_3 \; \cancel{y - z = 1} \end{array}\right\} S$$

(Interpret. geomètrica: S_1, S_2, S_3 són 3 plans que es tallen en una mateixa recta)